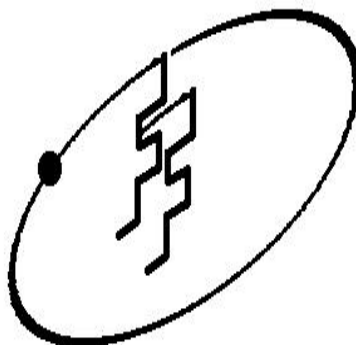


Universidad de La Habana

Facultad de Física



Tesis presentada en opción al grado de Licenciatura en Física

Modelación biomecánica del crecimiento de un tumor sólido en fase avascular

Autor:

Alex Manners Echemendia

Tutores:

Dr. Reinaldo Rodríguez Ramos. Facultad de Matemática y Computación.

Msc. Ariel Ramírez Torres. Ciudad Universitaria José Antonio Echevarría.

La Habana 2015

Índice general

Índice	1
Introducción	1
Estado del arte	2
Capítulo 1. Elementos de Análisis Tensorial	4
1.0.1. Los tensores de segundo orden y sus propiedades	4
1.0.2. Producto tensorial	5
1.0.3. Representación de un tensor respecto a una base	6
1.0.4. Operaciones con tensores de segundo orden	7
1.0.5. Transposición de tensores	8
1.0.6. Inversión de tensores	8
1.0.7. Producto escalar de tensores de segundo orden	9
1.0.8. Funciones tensoriales. Cálculo diferencial	10
1.0.8.1. Continuidad de una función tensorial	10
1.0.8.2. Derivada de una función tensorial	11
1.0.8.3. Derivada de funciones escalares tensoriales	11
1.0.9. Divergencia de un campo tensorial	12
1.0.10. Invariantes principales de un tensor de segundo orden	12
Capítulo 2. Conceptos fundamentales de la Mecánica de los Medios Continuos	16
2.1. Cinemática	16
2.1.1. Configuraciones y movimiento de un cuerpo continuo	16
2.1.2. Movimiento	17
2.1.3. Derivadas materiales y espaciales	17
2.1.3.1. Derivada material de un campo material	17
2.1.3.2. Derivada espacial de un campo espacial	18
2.1.3.3. Derivada material de un campo espacial	18
2.1.4. Campos de desplazamiento, de velocidad y aceleración	18
2.1.4.1. Campo de desplazamiento	18
2.1.4.2. Campos de velocidad y aceleración	18
2.1.5. Gradiente de deformación	20
2.1.5.1. Gradiente de velocidad material y espacial	21
2.2. Concepto de tensión	22
2.2.1. Vectores de tracción y tensores de tensión	22
2.3. Ecuaciones de balance	23
2.3.1. Conservación de la masa	23
2.3.2. Conservación del momento lineal	25
2.4. Relaciones constitutivas	27
2.4.1. Ecuaciones constitutivas para materiales hiperelásticos	27
2.4.1.1. Formas equivalente de la energía de deformación	27
2.4.1.2. Formas reducidas de las ecuaciones constitutivas	27

2.4.2. . Materiales hiperelásticos isotrópicos	28
2.5. . Nociones de teoría de mezclas	29
2.5.1. . Ecuación de balance de masa para la mezcla	31
2.5.2. . Ecuación de movimiento para la mezcla	32
2.6. . Elementos de la teoría de las múltiples configuraciones naturales	33
Capítulo 3. Modelación del crecimiento del tumor	36
3.1. . Descripción fenomenológica del crecimiento del tumor	36
3.1.1. . Ciclo celular	36
3.1.2. . El cáncer y el ciclo celular	37
3.1.3. . Etapas del cáncer	38
3.2. . Hipótesis y consideraciones para el crecimiento del tumor	38
3.3. . Aplicación de la teoría de las múltiples configuraciones naturales al crecimiento de un tumor sólido	39
3.4. . Relaciones geométricas	42
3.4.1. . Operadores nabla y Laplaciano en coordenadas esféricas	43
3.5. . Ecuaciones de balance	44
3.5.0.1. . Balance de masa	44
3.5.1. . Balance del momento lineal	46
3.6. . Acoplamiento entre crecimiento y tensión	50
3.7. . Evolución de la concentración de nutrientes	51
3.8. . Ley de crecimiento	52
3.9. . Planteamiento matemático del problema	53
3.9.0.1. . Condiciones de frontera	53
3.9.1. . Caso límite	54
3.10. . Presentación de análisis y resultados	54
Conclusiones y recomendaciones	59
Conclusiones	59
Recomendaciones	59
Apéndice A. Complementos del capítulo 3	60
A.1. . Operadores nabla y Laplaciano en coordenadas esféricas	60
Apéndice B. Generalidades de la mecánica de los Medios Continuos	62
B.1. . Formas equivalentes de la energía de deformación	63
Bibliografía	64

Introducción

El cáncer y la existencia de tumores en los seres humanos representa una de las primeras cinco causas de muerte en el mundo occidental. Todas las enfermedades bajo esta clasificación están caracterizadas por profundas perturbaciones de las reglas fundamentales de comportamiento celular en organismos multicelulares. Aún cuando han habido enormes recursos económicos y humanos en el campo de la ciencia llámese, medicina, biología, física, matemática, etc, dedicados a comprender la dinámica del crecimiento de los tumores desde los distintos enfoques, con la finalidad de lograr la erradicación o bien la prevención de la enfermedad, muchos de los tratamientos en práctica no son enteramente efectivos. Un tratamiento sistemático, utilizando modelaje matemático podría ayudar a elucidar los mecanismos fundamentales subyacentes al progreso de la enfermedad y conduciría al mejoramiento o desarrollo de nuevas estrategias terapéuticas.

Un tumor está constituido por un conglomerado de células anómalas que se multiplican descontroladamente, a diferencia de las células normales del organismo humano. La biomecánica se concentra en el desarrollo y solución de modelos matemáticos que describen los diferentes aspectos de crecimiento del tumor, brindando el beneficio de prevenir la experimentación excesiva, además de contar con una descripción cualitativa que permite proveer a los biólogos con comprensiones complementarias de los mecanismos que pueden gobernar el desarrollo de los tumores. Por lo general, los principales modelos de la biomecánica en este terreno se agrupan en la modelación de tumores en fase avascular (fase primaria del tumor) que se caracterizan por poseer una fase sólida que se expande en el tiempo (pueden ser días o años en dependencia de la línea celular). Esta característica y el gran número de células que conforman el tumor hacen posible adecuar las herramientas de la Mecánica de los Medios Continuos para la modelación del crecimiento de un tumor sólido.

Como la dinámica compleja del tumor es muy intrincada para ser comprendida de una manera intuitiva se hace esencial desarrollar modelos formales computarizados para calcular estas dinámicas bajo diferentes condiciones y diferentes rangos de los parámetros. Este procedimiento se realiza en tres pasos principales:

- Se construye un modelo matemático, el cual es analizado teóricamente e implementado en la computadora.
- Los parámetros del modelo computarizado se ajustan con tipos específicos de tumores, sobre los cuales se generan predicciones acerca del crecimiento tumoral y de su vasculatura.
- El modelo se emplea para predecir el progreso de la enfermedad bajo diferentes regímenes terapéuticos

La Mecánica constituye una disciplina de la física cuyo principal objeto de estudio es relacionar la interacción con el movimiento. Existen diferentes ramas de esta disciplina, y una de ellas es la Mecánica de los Medios Continuos que se encarga del estudio de la respuesta de materiales, sólidos y fluidos a nivel macroscópico cuando estos están sujetos a diferentes condiciones de carga, siendo su principal objetivo el estudio de las tensiones a la que se ve sometido un cuerpo y lo hace mediante principios generales que son comunes a todos los materiales, expresados a través de ecuaciones diferenciales (conservación de masa y energía, conservación de momento lineal y angular, principio de entropía, etc.). Además de los principios generales se auxilia en las ecuaciones constitutivas que son las que definen a los materiales.

La metodología de la mecánica de los medios continuos permite establecer una relación entre el cambio de masa del tumor y las tensiones al que se ve sometido este durante su crecimiento asumiendo que esta masa está variando producto del crecimiento de células del tumor (o más bien proliferación celular) sin perder de vista que esto suceda a expensas de la cantidad de nutrientes que le llegan a las células.

Es necesario considerar al tumor como un cuerpo continuo y atribuirle propiedades que le son comunes a un subgrupo de cuerpos sólidos (cuerpos que definen materiales con propiedades hiperelásticas) descritas a través de las ya mencionadas relaciones constitutivas. Lo anterior posibilita que la evolución del tumor se derive de ecuaciones de balance y principios de conservación (principios generales) interrelacionados con leyes de difusión empleadas para caracterizar la evolución de los nutrientes que emplea el tumor para su desarrollo. Entre las principales herramientas de la Mecánica de los Medios Continuos que se emplearán son: la teoría de mezclas y la teoría de las múltiples configuraciones naturales. Ambas de vital importancia para la modelación del crecimiento

del tumor. Un reto esencial en la descripción de la dinámica de crecimiento del tumor es modelar simultáneamente el cambio de la masa y de las tensiones asociadas a dicho cambio, ya sea por causa del crecimiento o porque estas varían a expensas de las tensiones externas a las que pueda estar sometido el tumor (Ambrossi y Mollica 2004 [11], D.Ambrossi y F.Guana 2005 [13]). La teoría de múltiples configuraciones naturales permite modelar individualmente los cambios en masa y tensión, a través de un artificio matemático de relativa sencillez.

De lo expuesto anteriormente se deriva el problema científico de la investigación:

¿Cómo se relacionan las tensiones y el crecimiento de tumores sólidos?

Objetivos de la tesis

El objetivo general de la presente investigación, es realizar la modelación físico-matemática del crecimiento de un tumor sólido, empleando las herramientas teóricas que le son afines a la Mecánica de los Sólidos.

Objetivos específicos

1. Establecer un modelo general que interrelacione el crecimiento de masa de un tumor sólido con las tensiones que lo acompañan, considerando al mismo como un cuerpo continuo compresible y con respuesta hiperelástica.
2. Obtener soluciones aproximadas del modelo por medio de la simulación numérica.
3. Obtener el modelo de Ariel Ramírez 2014 [14] como caso límite en el cual el tumor crece en masa y no en número de células.

Estado del arte

Aunque existen tres distintas etapas del cáncer (avascular, vascular, y metastática), los investigadores centran su atención en responder las interrogantes de cada etapa específica del cáncer. La mayoría de los modelos matemáticos de tumores están referidos a modelar la fase avascular de los mismos, es decir tumores sin vasos sanguíneos. Esto no significa que este sea el aspecto más importante del crecimiento del tumor, por el contrario desde el punto de vista clínico la angiogenesis y el crecimiento vascular del tumor junto con la metástasis son los causantes del deterioro de la calidad de vida de los pacientes que poseen esta dolorosa enfermedad y que en no pocas ocasiones fallecen, por ello la modelación de estas etapas es crucial para establecer terapias contra el cáncer. No obstante, cuando se intenta modelar cualquier sistema complejo siempre se opta por tratar de comprender hasta donde sea posible, los componentes básicos del sistema, lo cual equivale a su comprensión. El crecimiento de los tumores avasculares es muchos más simple de modelar matemáticamente y contiene algunos de los fenómenos presentes en los tumores vasculares. Por otro lado, la facilidad y reproductibilidad de los experimentos con tumores avasculares significa que cualitativa y cuantitativamente la evidencia experimental excede a la de los tumores vasculares, por lo que a menudo resulta difícil aislar sus efectos individuales. En particular porque algunas líneas celulares de tumores crecen *in vitro* formando agregados esféricos, lo relativamente barato y fácil que resultan los experimentos *in vitro* en comparación con los experimentos animales han hecho los ensayos con tumores esferoides muy populares (Chapman 2007 [5]).

La mayoría de los experimentos que involucran tumores *in vitro* centran su atención en el papel que desempeñan los nutrientes y la difusión de oxígeno y su consumo en el crecimiento y desarrollo de los tumores. Más recientemente se ha demostrado que los efectos mecánicos juegan un papel importante en el desarrollo y crecimiento de los tumores. Por ejemplo cultivando tumores avasculares en un ambiente provisto de nutrientes a diferentes concentraciones en Hemlinger et al. (2002) [3] y en D. Martin et al. 2013 [10] se demostró que la tensión ejercida sobre las células del tumor reduce su tamaño con relación al crecimiento que experimenta cuando se encuentra libre de fuerzas aplicadas.

Desde el punto de vista matemático, la mayoría de los modelos que describen la evolución de tumores sólidos se basan en principios de balance de masa celular y ecuaciones de reacción difusión para factores de crecimiento. El principal reto en el desarrollo de tales modelos ha sido describir como emigran las células del tumor, se reproducen y mueren, y como los diferentes químicos que se difunden en el interior del tumor son producidos y consumidos por las células. Los primeros modelos de este tipo se enfocaron en un solo tipo de células, la densidad de las mismas fue asumida constante y el crecimiento del tumor unidimensional (Byrne y Preziosi 2003 [9]).

Hay que resaltar que ninguno de los modelos matemáticos descritos anteriormente, permiten la investigación del impacto que los fenómenos mecánicos pueden tener en el desarrollo de los tumores sólidos. Una aproximación

alternativa que permite semejantes investigaciones es la que involucra la deducción de ecuaciones de balance de masa y de momentum para cada población celular. Al desarrollar las ecuaciones de balance de momentum por parte de estos modelos se hace necesario considerar la interacción de naturaleza mecánica entre células y para su descripción son introducidas leyes constitutivas. En la literatura estos modelos son conocidos como *modelos multifase* (Byrne y Preziosi 2003 [9], Ambrossi y Mollica 2002 [19], G. J. Pettet et al. 2001 [20]). Dentro de estos se han hecho muy populares los modelos bifásicos.

Estos modelos tienen en común partir de la hipótesis de que el tumor está constituido por dos fases: una fase sólida conformada por todas las células del tumor y una fase líquida constituida por los fluidos extracelulares necesarios para el desarrollo de las células tumorales. Se considera una sola especie de células y se asume que cuando estas mueren se desintegran instantáneamente en productos desechables y material reusable (fluido extracelular). De este modo existirá un constante intercambio de masa entre ambas fases. El marco sobre el cual se sustenta este tipo de modelos (y en general para todo modelo multifase) es la teoría de mezclas.

Por otro lado existe otra clase de modelos bastante similares a estos últimos, en los cuales el tumor está constituido por dos especies (células y nutrientes). Una de las particularidades de este tipo de modelos radica en que el intercambio de masa entre las dos especies se efectúa de manera unidireccional, es decir que una de las especies está desapareciendo para transformarse en la otra, a diferencia de los modelos bifásicos en donde existe un mutuo intercambio entre sus componentes. La investigación se centrará fundamentalmente en la aplicación de ecuaciones de balance y relaciones constitutivas para el estudio de las tensiones en la fase sólida del tumor, esta crecerá a expensas de la especie que representa los nutrientes y cuyo estado de agregación es intrascendente a los efectos del modelo. La evolución de los nutrientes se describirá por lo general, a través de leyes de difusión (Ambrossi y Mollica 2004 [11], Ariel Ramírez 2012 [15], Davide Ambrossi y Krishna Garikipati 2008 [18]).

Este trabajo por su parte se adhiere a la línea de investigación sugerida por este último tipo de modelos.

Apecto novedoso de la tesis

El aspecto novedoso de la tesis radica en el empleo de la Mecánica de los Medios Continuos para el estudio del crecimiento y de las respuestas mecánicas de un tumor sólido en fase avascular, bajo la hipótesis de que su crecimiento no solo es producto del aumento de la masa de sus células sino que también se debe al incremento de su número.

Estructura de la tesis

La tesis consta de: introducción, tres capítulos, conclusiones, recomendaciones y bibliografía. El capítulo 1 se encarga de adentrar los fundamentos teóricos del análisis tensorial, imprescindible para el desarrollo de posteriores capítulos. El capítulo 2 tiene la finalidad de introducir los conceptos básicos de la Mecánica de los Medios Continuos. En el capítulo 3 se introduce y desarrolla el modelo de crecimiento de un tumor sólido con la introducción de la teoría de las múltiples configuraciones naturales y empleando las herramientas matemáticas y teóricas presentadas en los capítulos 1 y 2. Al final del tercer capítulo se presentan los resultados obtenidos al darle solución numérica al modelo. Finalmente se presentan las conclusiones, recomendaciones y bibliografía.

Capítulo 1

Elementos de Análisis Tensorial

Frecuentemente en la mecánica de los sólidos nos encontramos con cuerpos que poseen propiedades que varían de una dirección a otra del espacio. Para la descripción de dichas propiedades se emplea una clase especial de magnitudes conocidas a título de “*magnitudes tensoriales*”. El ente abstracto (matemático) por medio del cual se definen este tipo de magnitudes, son los tensores y es mediante los mismos que se construye el formalismo matemático con que se opera en la mecánica de los sólidos. Por este motivo no se puede emprender el estudio de esta disciplina pasando por inadvertido el conocimiento de determinadas definiciones, teoremas y propiedades que giran en torno de los tensores que posibilitan poder manipularlos. Varias de las demostraciones que no aparecen en este capítulo se pueden consultar en el libro de Istkov 2009 [1].

1.0.1. Los tensores de segundo orden y sus propiedades

Definición 1.1. Sea Lin^n el conjunto de todas las aplicaciones lineales del espacio vectorial \mathbb{E}^n (espacio euclidiano de dimensión n) en \mathbb{E}^n . Tal aplicación se define de la siguiente manera

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n, \quad \forall \mathbf{A} \in Lin^n. \quad (1.1)$$

Los elementos de Lin^n se denominan tensores (A lo largo de este trabajo haremos especial incapié en tensores de segundo orden).

Definición 1.2. Se define el producto de un tensor $\mathbf{A} \in Lin^n$ por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ como

$$(\alpha \mathbf{A}) \mathbf{x} = \alpha (\mathbf{A} \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n. \quad (1.2)$$

y la suma de dos tensores \mathbf{A} y \mathbf{B} se define como

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n. \quad (1.3)$$

La linealidad de la aplicación (1.1) se expresa en las siguientes relaciones

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{A} \mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n, \quad \forall \mathbf{A} \in Lin^n, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{A}(\alpha \mathbf{x}) = \alpha (\mathbf{A} \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{A} \in Lin^n, \quad (1.5)$$

Observemos que si hace $\alpha = -1$ se obtiene el tensor opuesto de \mathbf{A}

$$-\mathbf{A} = (-1) \mathbf{A}. \quad (1.6)$$

Definición 1.3. Se define al tensor nulo ($\hat{\mathbf{0}}$) y al tensor identidad (\mathbf{I}) de la siguiente manera

$$\hat{\mathbf{0}} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{I} \mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n. \quad (1.8)$$

Las propiedades básicas de los tensores se pueden resumir en las que se muestran a continuación $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in Lin^n$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}, \quad (1.10)$$

$$\mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}, \quad (1.12)$$

$$\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{I}\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad (1.14)$$

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}, \quad (1.15)$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}. \quad (1.16)$$

1.0.2. Producto tensorial

Definición 1.4. Sean los vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$, entonces el producto tensorial se define como

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}), \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n, \quad (1.17)$$

donde “ \cdot ” representa el producto escalar en \mathbb{E}^n .

Es necesario aclarar que en la expresión (1.17) el término $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})$ se denomina producto diádico entre vectores (lo cual constituye un tensor de segundo orden).

Desarrollando la expresión (1.17) para dos vectores de \mathbb{E}^3 se ve inmediatamente que

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

que no es más que la forma matricial del producto diádico.

La relación (1.17) constituye una aplicación lineal. En efecto $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{E}^n$ se cumple que

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a}\{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y})\} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x} + (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{y} \quad (1.19)$$

$$\alpha(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x} = \mathbf{a}\{\mathbf{b} \cdot (\alpha\mathbf{x})\} = \alpha(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a} = \alpha(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x} \quad (1.20)$$

Estas propiedades son fácilmente deducibles a partir de (1.2) y de (1.3) simplemente haciendo $\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

Otras propiedades importantes para el producto tensorial son las siguientes

$$\mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{c}, \quad (1.21)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}, \quad (1.22)$$

$$(\alpha\mathbf{a}) \otimes (\beta\mathbf{b}) = \alpha\beta(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}). \quad (1.23)$$

La propiedad (1.21), (1.22) y (1.23) se demuestran fácilmente empleando (1.17) por ejemplo para (1.21):

$$\mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{x} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{c})\mathbf{x}. \quad (1.24)$$

1.0.3. Representación de un tensor respecto a una base

El conjunto de las aplicaciones asociadas al conjunto de los tensores de segundo orden Lin^n constituyen un espacio vectorial. El objetivo de esta sección es mostrar como se puede construir una base en Lin^n usando el producto tensorial definido en la sección anterior. Para ello es necesario establecer el concepto de base dual.

Definición 1.5. Sea $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$ una base del espacio \mathbb{E}^n . Entonces una base $\hat{\mathcal{F}} = \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \dots, \mathbf{f}^n\}$ de \mathbb{E}^n se denomina base dual de \mathcal{F} si se cumple la siguiente condición

$$\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}^j = \delta_j^i; \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.25)$$

donde

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \quad (1.26)$$

La expresión (1.26) es conocida como la delta de Kronecker (la cual contiene todas las componentes del tensor identidad \mathbf{I})

Definición 1.6. Sean $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$ y $G = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n\}$ dos bases arbitrarias de \mathbb{E}^n . Entonces los tensores $\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) representan una base de Lin^n . La dimensión de este espacio vectorial es precisamente n^2 .

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in Lin^n$ un tensor arbitrario fijo y considérese la siguiente combinación lineal

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j) \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j, \quad (1.27)$$

Aquí $\mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j = \mathbf{f}^i \cdot (\mathbf{A} \mathbf{g}^j)$ donde \mathbf{f}^i y \mathbf{g}^i constituyen las bases duales asociadas a las bases \mathcal{F} y G .

Demostando que los tensores \mathbf{A} y \mathbf{A}' coinciden solo y solo cuando $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ se demuestra que todo tensor de Lin^n se representa por una combinación lineal de los tensores $\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j$. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ un vector arbitrario, entonces será válido que

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{f}^i = x_j \mathbf{g}^j. \quad (1.28)$$

Considerando (1.25) se tendrá que

$$\mathbf{A}'\mathbf{x} = (\mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j) \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j (x_k \mathbf{g}^k) = (\mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j) \mathbf{f}_i x_k \delta_j^k = x_j (\mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j) \mathbf{f}_i. \quad (1.29)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = x_j \mathbf{A} \mathbf{g}^j, \quad (1.30)$$

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{f}^i = (\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{x}) \mathbf{f}_i. \quad (1.31)$$

Combinando (1.30) y (1.31)

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = x_j \mathbf{A} \mathbf{g}^j = x_j ([\mathbf{f}^i \cdot (\mathbf{A} \mathbf{g}^j)] \mathbf{f}_i) = x_j (\mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j) \mathbf{f}_i = \mathbf{A}'\mathbf{x}.$$

Finalmente $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$

Los tensores $\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j$ son linealmente dependientes, puesto que de no ser así se podrían encontrar escalares α^{ij} no todos nulos tales que, $\alpha^{ij} \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j = \mathbf{0}$, o sea para $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

$$\alpha^{ij} (\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j) \mathbf{x} = \alpha^{ij} \mathbf{f}_i (\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{x}) = 0,$$

$\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{x} \neq 0$ pues G es una base de \mathbb{E}^n (cualquier vector de este espacio puede ser expresado como combinación lineal de los vectores de G). Entonces quedaría que $\alpha^{ij} \mathbf{f}_i = 0$, pero esto no puede suceder ya que \mathcal{F} también es una base de \mathbb{E}^n . En conclusión $\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j$ representa una base de Lin^n . \square

Todo lo expuesto anteriormente es suficiente para expresar a todo tensor $\mathbf{A} \in Lin^n$ en función de las bases $\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_j$, $\mathbf{f}^i \otimes \mathbf{f}^j$, $\mathbf{f}^i \otimes \mathbf{f}_j$, $\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^j$

$$\mathbf{A} = A^{ij} \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_j = A_{ij} \mathbf{f}^i \otimes \mathbf{f}^j = A_{.j}^i \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_j = A_i^j \mathbf{f}^i \otimes \mathbf{f}_j, \quad (1.32)$$

donde

$$A^{ij} = \mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{f}^j, \quad A_{ij} = \mathbf{f}_i \mathbf{A} \mathbf{f}_j, \quad A_{.j}^i = \mathbf{f}_i \mathbf{A} \mathbf{f}^j, \quad A_i^j = \mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{f}_j.$$

1.0.4. Operaciones con tensores de segundo orden

Definición 1.7. Sean $A, B \in \text{Lin}^n$ dos tensores de segundo orden. Entonces al tensor $C = AB$ se le denomina composición de A y B , si

$$Cx = A(Bx), \quad \forall x \in \mathbb{E}^n. \quad (1.33)$$

Hay que resaltar que en general la composición de tensores no constituye una operación conmutativa. O sea $AB \neq BA$

Para la operación de composición de tensores se cumplen las siguientes propiedades

$$A0 = 0A = 0, \quad (1.34)$$

$$AI = IA = A, \quad (1.35)$$

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (1.36)$$

$$(B + C)A = BA + CA, \quad (1.37)$$

$$A(BC) = (AB)C. \quad (1.38)$$

La relación (1.36) se demuestra fácilmente $\forall x \in \mathbb{E}^n$

$$\{A(B + C)x\} = A\{(B + C)x\} = A((Bx) + (Cx)).$$

Los términos Bx y Cx constituyen vectores. Hagamos entonces $x_1 = Bx$ y $x_2 = Cx$; se tendrá en virtud de (1.4) que

$$A((Bx) + (Cx)) = A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = (AB)x + (AC)x = (AB + AC)x.$$

Para la demostración de las relaciones (1.35), (1.37) y (1.38) se emplean procedimientos similares. Por ejemplo para (1.37) se hace $y = Ax$ y se aplica (1.3)

$$(B + C)Ax = (B + C)y = By + Cy = (BA)x + (CA)x = (BA + CA)x, \quad \forall y \in \mathbb{E}^n.$$

Para (1.35) se hace igualmente $y = Ax$ y se aplica (1.8) y (1.33)

$$(IA)x = I(Ax) = Iy = y = A(Ix) = (AI)x = y, \quad \forall y \in \mathbb{E}^n.$$

Para la relación (1.38) se hace $y = Cx$ y se aplica (1.33)

$$(AB)Cx = (AB)y = A(By) = A(BC)x, \quad \forall x \in \mathbb{E}^n.$$

A la aplicación (1.33) se le conoce habitualmente como aplicación por la “derecha”; definamos ahora la aplicación por la “izquierda”.

Definición 1.8. Se define la aplicación por la “izquierda” por medio de la siguiente condición

$$(yA) \cdot x = y \cdot (Ax), \quad \forall x \in \mathbb{E}^n, \forall A \in \text{Lin}^n \quad (1.39)$$

Como el orden de las operaciones en (1.39) es intrascendente, se procede como lo indica la siguiente notación

$$(yA) \cdot x = y \cdot (Ax) = yAx. \quad (1.40)$$

A partir de (1.39) se desprende que

$$y(a \otimes b) = (y \cdot a)b \quad \forall y \in \mathbb{E}^n. \quad (1.41)$$

1.0.5. Transposición de tensores

Definición 1.9. El tensor transpuesto \mathbf{A}^T correspondiente al tensor \mathbf{A} es definido como

$$\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{x} \mathbf{A} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n. \quad (1.42)$$

Inmediatamente de (1.42) se desprende que

$$\mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{y} \mathbf{A}^T \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n, \quad (1.43)$$

comprobemos

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{A} \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{x}) = \mathbf{y} \mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \mathbf{A}^T), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n.$$

De aquí se desprende que

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}. \quad (1.44)$$

La transposición constituye una aplicación lineal,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T, \quad (1.45)$$

$$(\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T. \quad (1.46)$$

Una propiedad importante que merece ser demostrada es la siguiente: la transposición de la composición de tensores

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T. \quad (1.47)$$

La propiedad (1.47) se demuestra de la siguiente forma

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})^T \mathbf{x} = \mathbf{x} (\mathbf{A} \mathbf{B}) = (\mathbf{x} \mathbf{A}) \mathbf{B} = \mathbf{B}^T (\mathbf{x} \mathbf{A}) = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n. \quad (1.48)$$

Partiendo de (1.17) y de (1.41) se obtiene la representación de un tensor transpuesto en forma de producto tensorial para dos vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$.

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \quad (1.49)$$

Definición 1.10. Sea $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$, entonces \mathbf{A} se dice simétrico si

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A} \quad (1.50)$$

1.0.6. Inversión de tensores

Definición 1.11. Sea la aplicación $\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}$, el tensor de segundo orden $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$ se dice invertible, si existe un tensor $\mathbf{A}^{-1} \in \text{Lin}^n$ que cumple la siguiente condición

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n. \quad (1.51)$$

Al tensor \mathbf{A}^{-1} se le denomina tensor inverso de \mathbf{A} . De (1.1) y de (1.51) se tiene

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{x}) = (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n, \quad (1.52)$$

y en consecuencia

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (1.53)$$

De manera análoga se obtiene

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (1.54)$$

Partiendo de las relaciones (1.47), (1.54) y tomando en cuenta el carácter simétrico del tensor identidad ($\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$) se obtiene el siguiente resultado

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{A}^T = \mathbf{I}^T = \mathbf{I}. \quad (1.55)$$

De donde inmediatamente se deduce que

$$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-T}. \quad (1.56)$$

La operación de inversión para la composición de tensores de segundo orden cumple con la siguiente relación

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \quad (1.57)$$

que como se puede observar su forma se asemeja a (1.47).

Para la demostración de (1.57) consideremos el vector $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}$. Aplicando por la izquierda primero con \mathbf{A}^{-1} y luego con \mathbf{B}^{-1} tendremos

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\{\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x})\} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x}, \quad (1.58)$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{y}, \quad (1.59)$$

lo cual demuestra la relación (1.57).

Sobre la base de lo visto hasta ahora acerca de transposición e inversión de tensores, puede brindarse la definición de tensor ortogonal.

Definición 1.12. Un tensor $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$ se dice ortogonal si cumple lo siguiente

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-T}. \quad (1.60)$$

Definición 1.13. Sea $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$, entonces \mathbf{A} es definido positivo si se cumple que

$$\mathbf{a}\mathbf{A}\mathbf{a} > 0, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{E}^n, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}. \quad (1.61)$$

1.0.7. Producto escalar de tensores de segundo orden

Definición 1.14. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \in \mathbb{E}^n$. Entonces se define el producto escalar de $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ y $\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$ como

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}). \quad (1.62)$$

Al igual que en el producto escalar de vectores, del producto escalar de tensores de segundo orden se obtiene un escalar, lo que se comprueba fácilmente para dos tensores arbitrarios \mathbf{A} y \mathbf{B} expresados en la forma (1.32)

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij}B^{ij} = A^{ij}B_{ij} = A^i_j B^j_i = A^j_i B^i_j. \quad (1.63)$$

Guiándonos por el convenio de Einstein podemos apreciar que la expresión (1.63) es una suma de nueve términos (todos escalares) dados por el producto de las componentes de los tensores \mathbf{A} y \mathbf{B} lo cual evidencia que el producto de los mismos da como resultado un escalar.

El producto escalar de tensores obedece las siguientes propiedades:

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{B} : \mathbf{A}, \quad (1.64)$$

$$\mathbf{A} : (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} : \mathbf{B} + \mathbf{A} : \mathbf{C}, \quad (1.65)$$

$$\alpha(\mathbf{A} : \mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A}) : \mathbf{B} = \mathbf{A} : (\alpha\mathbf{B}), \quad (1.66)$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{A} \geq 0, \quad \forall \mathbf{A} \in \text{Lin}^n, \quad (1.67)$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (1.68)$$

La propiedad (1.67) permite definir la norma de un tensor de segundo orden $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$ como

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}} \quad (1.69)$$

Proposición 1.1. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ tensores de segundo orden. Entonces

$$\mathbf{A} : (\mathbf{BC}) = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}) : \mathbf{C} = (\mathbf{AC}^T) : \mathbf{B}. \quad (1.70)$$

Demostración. La relación (1.70) se demuestra fácilmente tomando en cuenta (1.63)

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : [(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})(\mathbf{e} \otimes \mathbf{f})] &= (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}) [(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{f})] \\ &= (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}), \\ [(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})^T (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})] : (\mathbf{e} \otimes \mathbf{f}) &= [(\mathbf{d} \otimes \mathbf{c}) (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})] : (\mathbf{e} \otimes \mathbf{f}) \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) [(\mathbf{d} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{e} \otimes \mathbf{f})] = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}), \\ [(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{e} \otimes \mathbf{f})^T] : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) &= [(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{f} \otimes \mathbf{e})] : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) \\ &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}) [(\mathbf{a} \otimes \mathbf{e}) : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})] = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}). \end{aligned}$$

□

De manera similar se demuestra que

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{A}^T : \mathbf{B}^T. \quad (1.71)$$

Definición 1.15. Sea $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$. Entonces la traza del tensor \mathbf{A} se define como

$$\text{tr} \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I}. \quad (1.72)$$

De la relación (1.70) se infiere que

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A} : \mathbf{B}^T = \mathbf{A}^T : \mathbf{B}. \quad (1.73)$$

Como el producto escalar de tensores es conmutativo (véase (1.64)) se cumple que

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA}). \quad (1.74)$$

1.0.8. Funciones tensoriales. Cálculo diferencial

Definición. Una función tensorial de la variable t real es una aplicación $\mathbf{A}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \text{Lin}^n$ que a cada número real le hace corresponder un tensor $\mathbf{A}(t) \in \text{Lin}^n$.

1.0.8.1. Continuidad de una función tensorial

Definición 1.16. La función tensorial $\mathbf{A}(t)$ se dice continua en el punto t_0 si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(t_0)] = \mathbf{0}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.75)$$

1.0.8.2. Derivada de una función tensorial

Definición 1.17. Una función tensorial $\mathbf{A}(t)$ se dice diferenciable si existe el límite (y además es finito)

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t+s) - \mathbf{A}(t)}{s}. \quad (1.76)$$

Este límite se denomina derivada de la función $\mathbf{A}(t)$.

Sea $u(t)$ una función escalar y $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b}(t)$ funciones vectoriales. Las funciones tensoriales diferenciables satisfacen las siguientes reglas de derivación (que guardan una estrecha similitud con las de las funciones escalares diferenciables)

$$\frac{d}{dt} [u(t) \mathbf{A}(t)] = \frac{du(t)}{dt} \mathbf{A}(t) + u(t) \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}, \quad (1.77)$$

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{a}(t) \mathbf{A}(t)] = \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \mathbf{A}(t) + \mathbf{a}(t) \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}, \quad (1.78)$$

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t) : \mathbf{B}(t)] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} : \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) : \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt}, \quad (1.79)$$

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{a}(t) \otimes \mathbf{b}(t)] = \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \otimes \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \otimes \frac{d\mathbf{b}(t)}{dt}, \quad (1.80)$$

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t) \mathbf{B}(t)] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt}. \quad (1.81)$$

La demostración de las reglas de derivación que acabamos de enunciar pueden verse en el libro de Itskov 2009 [1]

1.0.8.3. Derivada de funciones escalares tensoriales

Consideremos ahora una función escalar tensorial

$$f(\mathbf{A}) : \text{Lin}^n \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.82)$$

Definición 1.18. La función escalar (1.82) es diferenciable en una vecindad del tensor \mathbf{A} si existe un tensor $f(\mathbf{A})_{,A}$ en Lin^n tal que

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{A} + t\mathbf{X})_{t=0} = f(\mathbf{A})_{,A} : \mathbf{X}, \quad \forall \mathbf{X} \in \text{Lin}^n, \quad (1.83)$$

Obsérvese que (1.83) constituye una aplicación lineal pues

$$[f(\mathbf{A}) + g(\mathbf{A})]_{,A} = f(\mathbf{A})_{,A} + g(\mathbf{A})_{,A}, \quad (1.84)$$

$$\alpha [f(\mathbf{A})]_{,A} = \alpha f(\mathbf{A})_{,A}, \quad (1.85)$$

siendo f y g funciones escalares tensoriales para las cuales se cumple (1.83).

Las propiedades (1.84) y (1.85) se demuestran fácilmente a partir de (1.83)

$$\begin{aligned} [(f+g)(\mathbf{A})]_{,A} : \mathbf{X} &= \frac{d}{dt} [(f+g)(\mathbf{A} + t\mathbf{X})]_{t=0} = \frac{d}{dt} [f(\mathbf{A} + t\mathbf{X}) + g(\mathbf{A} + t\mathbf{X})]_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} [f(\mathbf{A} + t\mathbf{X})]_{t=0} + \frac{d}{dt} [g(\mathbf{A} + t\mathbf{X})]_{t=0} = f(\mathbf{A})_{,A} : \mathbf{X} + g(\mathbf{A})_{,A} : \mathbf{X} = [f(\mathbf{A})_{,A} + g(\mathbf{A})_{,A}] : \mathbf{X} \end{aligned}$$

para cada \mathbf{X} en Lin^n .

1.0.9. Divergencia de un campo tensorial

Definición 1.19. *Un sistema de coordenadas es una correspondencia biunívoca entre cada vector del espacio euclideo \mathbb{E}^n y un conjunto de números reales (x^1, x^2, \dots, x^n) . Este conjunto representa las coordenadas de los correspondientes vectores, o sea,*

$$x^i = x^i(\mathbf{r}) \iff \mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (1.86)$$

donde $\mathbf{r} \in \mathbb{E}^n$ y $x^i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Además se asume que las funciones $x^i = x^i(\mathbf{r})$ y $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ son diferenciables.

Si se toma en consideración un sistema curvilíneo arbitrario

$$\theta^i = \theta^i(r) \iff r = r(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n), \quad (1.87)$$

donde $r \in \mathbb{E}^n$ y $\theta^i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Asumiendo que $u = u(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n)$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n)$ y $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n)$ sean una función escalar, vectorial y tensorial diferenciables en relación a las coordenadas $\theta^i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) respectivamente, estas tendrán la denominación de campo escalar, campo vectorial y campo tensorial respectivamente. Como consecuencia de la correspondencia biunívoca en (1.86) dichos campos pueden representarse como: $u = u(\mathbf{r})$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$, y $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Definición 1.20. *Se define la divergencia de un campo tensorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ de la siguiente manera*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{\mathbf{A}} \mathbf{A} n dA = \mathbf{A}_{,i} \mathbf{f}^i \quad (1.88)$$

siendo $\mathbf{A}_{,i} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta^i}$. La integración se realiza sobre una superficie cerrada de área A con volumen V y vector normal unitario \mathbf{n} .

Si consideramos un campo escalar $u = u(\mathbf{r})$, los campos vectoriales $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{r})$ y el campo tensorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ estos satisfarán las siguientes propiedades

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{a}) = \mathbf{u}\nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a}\nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (1.89)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{A}) = \mathbf{u}\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A}\nabla \mathbf{u}, \quad (1.90)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{a}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{A} : \nabla \mathbf{a}, \quad (1.91)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\nabla \mathbf{a}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b}. \quad (1.92)$$

1.0.10. Invariantes principales de un tensor de segundo orden

Definición 1.21. *Los invariantes fundamentales de un tensor $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$ son los siguientes*

$$\text{I}_{\mathbf{A}} = I_{\mathbf{A}}^{(1)} = \text{tr} \mathbf{A}, \quad (1.93)$$

$$\text{II}_{\mathbf{A}} = I_{\mathbf{A}}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[(\text{tr} \mathbf{A})^2 - \text{tr} \mathbf{A}^2 \right], \quad (1.94)$$

$$\text{III}_{\mathbf{A}} = I_{\mathbf{A}}^{(3)} = \frac{1}{3} \left[\text{tr} \mathbf{A}^3 - \frac{3}{2} \text{tr} \mathbf{A}^2 \text{tr} \mathbf{A} + \frac{1}{2} (\text{tr} \mathbf{A})^3 \right] = \det \mathbf{A}. \quad (1.95)$$

A continuación se enuncia un teorema cuya demostración se omite (el lector interesado en la demostración puede referirse al libro Itskov 2009 [1]).

Teorema 1.1. *(Cayley-Hamilton) Sea*

$$p_{\mathbf{A}}^{(n)}(\lambda) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \lambda^{n-k} I_{\mathbf{A}}^{(k)} \quad (1.96)$$

el polinomio característico de un tensor de segundo orden \mathbf{A} . Con

$$I_{\mathbf{A}}^{(k)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} I_{\mathbf{A}}^{(k-i)} \text{tr} \mathbf{A}^i, k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.97)$$

y

$$I_{\mathbf{A}}^{(n)} = \det \mathbf{A} \quad (1.98)$$

Entonces,

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} I_{\mathbf{A}}^{(k)} \mathbf{A}^{n-k} = 0 \quad (1.99)$$

Proposición 1.2. Sea $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$. Entonces

$$\left(\text{tr} \mathbf{A}^k \right)_{,\mathbf{A}} = k \left(\mathbf{A}^{k-1} \right)^T, \quad (1.100)$$

donde $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$

Demostración. La relación (1.100) se demuestra partiendo de (1.83). Considérese un tensor arbitrario $\mathbf{X} \in \text{Lin}^n$ entonces tomando en cuenta (1.72)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\text{tr} (\mathbf{A} + t\mathbf{X})^k \right]_{t=0} &= \frac{d}{dt} [(\mathbf{A} + t\mathbf{X}) : I]_{t=0} = \frac{d}{dt} [(\mathbf{A} + t\mathbf{X})^k]_{t=0} : \mathbf{I} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\underbrace{(\mathbf{A} + t\mathbf{X})(\mathbf{A} + t\mathbf{X}) \dots (\mathbf{A} + t\mathbf{X})}_{k \text{ veces}} \right]_{t=0} : \mathbf{I} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\mathbf{A}^k + t \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^i \mathbf{X} \mathbf{A}^{k-1-i} + t^2 \dots \right]_{t=0} : \mathbf{I} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^i \mathbf{X} \mathbf{A}^{k-1-i} : \mathbf{I} = k \left(\mathbf{A}^{k-1} \right)^T : \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Finalmente, como la igualdad anterior se cumple para cada $\mathbf{X} \in \text{Lin}^n$ entonces

$$\left(\text{tr} \mathbf{A}^k \right)_{,\mathbf{A}} = k \left(\mathbf{A}^{k-1} \right)^T.$$

□

Proposición 1.3. Sea $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$. Entonces

$$\left(I_{\mathbf{A}}^{(1)} \right)_{,\mathbf{A}} = \mathbf{I}, \quad (1.101)$$

$$\left(I_{\mathbf{A}}^{(2)} \right)_{,\mathbf{A}} = I_{\mathbf{A}}^{(1)} \mathbf{I} - \mathbf{A}^T, \quad (1.102)$$

$$\left(I_{\mathbf{A}}^{(3)} \right)_{,\mathbf{A}} = I_{\mathbf{A}}^{(2)} \mathbf{I} + I_{\mathbf{A}}^{(1)} \mathbf{A}^T + \left(\mathbf{A}^2 \right)^T. \quad (1.103)$$

Para tensores inversibles (1.103) toma la forma

$$\left(I_{\mathbf{A}}^{(3)}\right)_{,\mathbf{A}} = I_{\mathbf{A}}^{(3)} \mathbf{A}^{-T}. \quad (1.104)$$

Demostración. (1.101) se demuestra fácilmente aplicando (1.100) directamente

$$\left(I_{\mathbf{A}}^{(1)}\right)_{,\mathbf{A}} = \text{tr}(\mathbf{A})_{,\mathbf{A}} = \text{tr}(\mathbf{A}^1)_{,\mathbf{A}} = 1(\mathbf{A}^0)^T = \mathbf{I}. \quad (1.105)$$

Para demostrar (1.102) modifiquemos ahora el invariante fundamental (1.94), de un modo que permita su derivación mediante el empleo de (1.100)

$$I_{\mathbf{A}}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[(\text{tr} \mathbf{A})^2 - \text{tr} \mathbf{A}^2 \right] = \frac{1}{2} \left[I_{\mathbf{A}}^{(1)} \text{tr} \mathbf{A} - \text{tr} \mathbf{A}^2 \right], \quad (1.106)$$

derivando (1.106) con respecto al tensor \mathbf{A}

$$\begin{aligned} \left(I_{\mathbf{A}}^{(2)}\right)_{,\mathbf{A}} &= \frac{1}{2} \left[I_{\mathbf{A}}^{(1)} \text{tr} \mathbf{A} - \text{tr} \mathbf{A}^2 \right]_{,\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \left[\left(I_{\mathbf{A}}^{(1)} \text{tr} \mathbf{A} \right)_{,\mathbf{A}} - (\text{tr} \mathbf{A}^2)_{,\mathbf{A}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\text{tr} \mathbf{A} \left(I_{\mathbf{A}}^{(1)} \right)_{,\mathbf{A}} + I_{\mathbf{A}}^{(1)} (\text{tr} \mathbf{A})_{,\mathbf{A}} - 2 \mathbf{A}^T \right] = \frac{2}{2} \left[(\text{tr} \mathbf{A}) \mathbf{I} - \mathbf{A}^T \right] \\ &= I_{\mathbf{A}}^{(1)} \mathbf{I} - \mathbf{A}^T. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Demostremos ahora la relación (1.103). Igualmente a como se hizo con el invariante (1.94) se expresa el invariante (1.95) en términos del invariante (1.93)

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{A}}^{(3)} &= \frac{1}{3} \left[\text{tr} \mathbf{A}^3 - \frac{3}{2} \text{tr} \mathbf{A}^2 \text{tr} \mathbf{A} + \frac{1}{2} (\text{tr} \mathbf{A})^3 \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[\text{tr} \mathbf{A}^2 - \text{tr} \mathbf{A} \text{tr} \mathbf{A}^2 + \frac{1}{2} \left((\text{tr} \mathbf{A})^2 - \text{tr} \mathbf{A} \right) \text{tr} \mathbf{A} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[\text{tr} \mathbf{A}^3 - I_{\mathbf{A}}^{(1)} \text{tr} \mathbf{A}^2 + I_{\mathbf{A}}^{(2)} \text{tr} \mathbf{A} \right]. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Derivando (1.108) con respecto al tensor \mathbf{A}

$$\begin{aligned} \left(I_{\mathbf{A}}^{(3)}\right)_{,\mathbf{A}} &= \frac{1}{3} \left[\text{tr} \mathbf{A}^3 - I_{\mathbf{A}}^{(1)} \text{tr} \mathbf{A}^2 + I_{\mathbf{A}}^{(2)} \text{tr} \mathbf{A} \right]_{,\mathbf{A}} \\ &= \frac{1}{3} \left([\text{tr} \mathbf{A}^3]_{,\mathbf{A}} - [I_{\mathbf{A}}^{(1)} \text{tr} \mathbf{A}^2]_{,\mathbf{A}} + [I_{\mathbf{A}}^{(2)} \text{tr} \mathbf{A}]_{,\mathbf{A}} \right) \\ &= 3(\mathbf{A}^2)^T - \text{tr} \mathbf{A}^2 \mathbf{I} - 3(\text{tr} \mathbf{A}) \mathbf{A}^T + \frac{3}{2} (\text{tr} \mathbf{A})^2 \mathbf{I} - \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{A}^2 \mathbf{I} \\ &= \frac{1}{2} \left[(\text{tr} \mathbf{A})^2 - \text{tr} \mathbf{A}^2 \right] \mathbf{I} - (\text{tr} \mathbf{A}) \mathbf{A}^T + (\mathbf{A}^2)^T \\ &= I_{\mathbf{A}}^{(2)} \mathbf{I} + I_{\mathbf{A}}^{(1)} \mathbf{A}^T + (\mathbf{A}^2)^T. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Si consideramos al tensor \mathbf{A} invertible y se realiza la aplicación del tensor \mathbf{A}^T por la “derecha” al tensor (1.103) tomando en cuenta que este satisface las hipótesis del teorema de Cayley-Hamilton se tendrá

$$\begin{aligned} \left(I_{\mathbf{A}}^{(3)}\right)_{,\mathbf{A}} \mathbf{A}^T &= I_{\mathbf{A}}^{(2)} \mathbf{A}^T - I_{\mathbf{A}}^{(1)} (\mathbf{A}^T)^2 + (\mathbf{A}^T)^3 \\ &= I_{\mathbf{A}}^{(3)} \mathbf{I} + \sum_{i=0}^3 (-1)^{i-1} I_{\mathbf{A}}^{(3-i)} (\mathbf{A}^T)^i = I_{\mathbf{A}}^{(3)} \mathbf{I} + p_{\mathbf{A}}^{(3)}(\mathbf{A}) \\ &= I_{\mathbf{A}}^{(3)} \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (1.110)$$

Por lo tanto

$$\left(I_{\mathbf{A}}^{(3)}\right)_{,\mathbf{A}} = I_{\mathbf{A}}^{(3)} \mathbf{A}^{-T}. \quad (1.111)$$

□

Resulta de vital importancia conocer la derivada de la función compuesta $f(\mathbf{A}(t))$.

Considérese una función escalar tensorial $f(\mathbf{A}) : \text{Lin}^n \rightarrow \mathbb{R}$, siendo $\mathbf{A}(t)$ una función tensorial diferenciable con respecto a la variable t , entonces

$$\frac{df(\mathbf{A}(t))}{dt} = f_{,\mathbf{A}} : \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad (1.112)$$

Para la demostración de (1.112) el lector puede referirse al libro de Itskov [1].

El teorema que se plantea a continuación será de vital importancia para los capítulos posteriores, para ver su demostración puede consultarse los libros de Itskov 2009 [1] y de Bertram 2008 [2].

Teorema 1.2. *(de descomposición polar) . Todo tensor invertible puede ser descompuesto de manera única de dos formas*

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (1.113)$$

donde \mathbf{R} es un tensor ortogonal y \mathbf{U}, \mathbf{V} son simétricos y definidos positivos.

Capítulo 2

Conceptos fundamentales de la Mecánica de los Medios Continuos

2.1. Cinemática

En la física de nuestros días, se da por sentado que existen elementos de materia indivisibles (átomos, moléculas, electrones, etc.) que conforman todos los objetos físicos que conocemos. Aunque es a través del entendimiento de los fenómenos que ocurren a nivel atómico que se comprenden gran parte de los fenómenos que acontecen a escala macroscópica, existen muchas situaciones en las que el conocimiento detallado de la microestructura interna puede ser prescindible; varias de ellas se abordan en la Mecánica de los Medios Continuos, en cuyos fundamentos se basa este trabajo. Esta disciplina se subdivide en los siguientes campos:

- El estudio del movimiento y la deformación (cinemática).
- El estudio de la tensión y la descripción matemática de las leyes físicas que rigen el movimiento de un cuerpo continuo (por medio de principios de balance).

La finalidad del presente capítulo se resume en derivar varias de las ecuaciones principales comprendidas en los campos anteriormente mencionados.

2.1.1. Configuraciones y movimiento de un cuerpo continuo

Considérese un cuerpo continuo \mathcal{B} con una partícula (punto) $P \in \mathcal{B}$ en \mathbb{R}^n ; dicho cuerpo será de nuestro interés si su “aspecto geométrico” es distinto para distintos momentos de tiempo, denotados por la variable t . Aquí la acepción de “aspecto geométrico” se usa en el sentido de que este es diferente si el cuerpo no coincide consigo mismo en dos momentos arbitrarios de tiempo t_1 y t_2 . En lo que sigue intercambiaremos la terminología de “aspecto geométrico” por la de configuración, es decir que cuando un cuerpo tenga un “aspecto geométrico” determinado en el instante de tiempo t se dirá que ha alcanzado la configuración que le corresponde en ese momento de tiempo. Si se considera a la variable t continua, se deduce inmediatamente que el cuerpo alcanza una secuencia continua (infinita) de configuraciones denotadas por $\kappa_0, \dots, \kappa_t$. Existe una relación biunívoca entre el tiempo t y cada configuración alcanzada por el cuerpo \mathcal{B} .

Definición 2.1. La configuración κ_0 , representa la **configuración de referencia, inicial o sin deformación**. La configuración de \mathcal{B} en el instante de tiempo t se denomina **configuración actual o deformada** y se denota por κ_t .

Si el punto x_0 representa la posición de una partícula del cuerpo \mathcal{B} en el instante de tiempo $t=0$ entonces el vector que comienza en el origen de coordenadas O y finaliza en el punto x_0 puede ser identificado como el **vector de posición** (o **vector de referencia**) de dicho punto y se denota por \mathbf{x}_0 . De manera similar, si el punto x representa la posición de una partícula del cuerpo en el instante $t>0$, entonces el vector que comienza en el origen de coordenadas O y concluye en dicho punto, representa el **vector de posición** (o **posición actual**) del punto x , el cual se simboliza por \mathbf{x} .

Aquí los vectores \mathbf{x} y \mathbf{x}_0 se expresan como combinaciones lineales donde los coeficientes que multiplican a los elementos de la base coinciden

$$\mathbf{x}_0 = x_{i0} \mathbf{e}_{i0} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{x} = x_j \mathbf{e}_j \quad (2.2)$$

A las componentes x_{i0} , $i=1,2,3$ se les denota como **coordenadas materiales (o simplemente de referencia)** del punto x_0 y a las componentes x_j , $j = 1,2,3$ se les denomina **coordenadas espaciales (o actuales)** del punto x .

Para mayor comodidad se ha asumido que los orígenes de los vectores que conforman la base $\{e_{i0}\}$ y $\{e_j\}$ coinciden y que incluso las configuraciones de referencia y actual se rigen por el mismo sistema de coordenadas. Esto da lugar a que sea indistinto el uso de una base o de otra (de referencia o actual), pues serán idénticas. En lo adelante solo se trabajará con la base $\{e_j\}$.

2.1.2. Movimiento

Definición 2.2. Los vectores $\mathbf{x} \in \kappa_t$ y $\mathbf{x}_0 \in \kappa_0$ se relacionan de manera única, para cada instante de tiempo t a través de la aplicación χ , denominada **movimiento** del cuerpo \mathcal{B} . La relación entre \mathbf{x} y \mathbf{x}_0 se establece de la siguiente forma

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}_0, t). \quad (2.3)$$

La relación (2.3) determina las sucesivas posiciones de una partícula P en el espacio. Tales posiciones forman una curva en el espacio euclideo conocida como **trayectoria** de la partícula P perteneciente al cuerpo \mathcal{B} . Se asume que la aplicación χ posee derivadas espaciales y temporales continuas.

Definición 2.3. Para el movimiento χ existe un **movimiento inverso** denotado por χ^{-1} (aplicación inversa de χ) que vincula unívocamente a los vectores \mathbf{x}_0 y \mathbf{x} para cada instante de tiempo t de la siguiente forma

$$\mathbf{x}_0 = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (2.4)$$

Al igual que (2.3) la aplicación χ^{-1} posee derivadas continuas respecto al tiempo y al espacio.

En la mecánica de los sólidos existen dos tipos de descripciones: la descripción material (o de referencia) y la descripción Euleriana (o espacial). La primera de estas descripciones constituye una caracterización del movimiento en relación a las coordenadas materiales de \mathbf{x}_0 y al momento de tiempo t . La descripción material también se conoce como descripción Lagrangiana (o forma lagrangiana). Por otro parte la descripción Euleriana es una caracterización del movimiento con respecto a las coordenadas espaciales de \mathbf{x} y al instante de tiempo t .

2.1.3. Derivadas materiales y espaciales

Un **campo material** es aquel campo vectorial en el cual las variables independientes son (\mathbf{x}_0, t) , o más bien la posición de referencia \mathbf{x}_0 con coordenadas materiales x_{0i} , $i = 1, 2, 3$ y el tiempo t . En cambio el campo vectorial en el cual las variables independientes son (\mathbf{x}, t) se denomina **campo espacial**, o sea es el campo que se emplea para designar que las variables independientes son la posición actual \mathbf{x} con coordenadas espaciales x_{0i} , $i = 1, 2, 3$ y el tiempo t .

Definición 2.4. Se denomina **campo material suave** a una función escalar f_0 que depende de las coordenadas materiales y del tiempo t ($f_0 = f_0(\mathbf{x}_0, t)$). Por otro lado se denomina **campo espacial suave** a una escalar f que depende de las coordenadas espaciales y del tiempo t ($f = f(\mathbf{x}, t)$).

2.1.3.1. Derivada material de un campo material

Definición 2.5. Se denomina **derivada material** de un campo material suave $f_0(\mathbf{x}_0, t)$ a su derivada parcial con respecto al tiempo la cual se denota por $\dot{f}(\mathbf{x}_0, t)$ o por $Df(\mathbf{x}_0, t)/Dt$

$$\dot{f}_0(\mathbf{x}_0, t) = \frac{Df_0(\mathbf{x}_0, t)}{Dt} = \frac{\partial f_0(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Definición 2.6. El **gradiente material** de un campo material $f_0(\mathbf{x}_0, t)$ se denota por $\nabla_{\mathbf{x}_0} f_0(\mathbf{x}_0, t)$ y se define como la derivada de f_0 en relación a la posición de referencia \mathbf{x}_0

$$\nabla_{\mathbf{x}_0} f_0(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial f_0(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (2.6)$$

2.1.3.2. Derivada espacial de un campo espacial

Definición 2.7. Se define a la **derivada espacial** de un campo espacial suave f como su derivada parcial con respecto al tiempo t , es decir,

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Definición 2.8. El gradiente espacial de un campo espacial suave f se denota por $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t)$ y se define como la derivada parcial de f con respecto a la posición actual \mathbf{x} , o sea,

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.8)$$

2.1.3.3. Derivada material de un campo espacial

Definición 2.9. La derivada material de un campo espacial suave $f(\mathbf{x}, t)$ se denota por $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$ o $Df(\mathbf{x}, t)/Dt$ y se define como la derivada parcial de f con respecto al tiempo t , donde f es una función compuesta del mismo a través del movimiento $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}_0, t)$.

$$\dot{f}(\mathbf{x}, t) = \frac{Df(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \left(\frac{\partial f(\chi(\mathbf{x}_0, t), t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_0 = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)}. \quad (2.9)$$

$$= \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)_x + \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right)_t \cdot \left(\frac{\partial \chi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_0 = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)}. \quad (2.10)$$

La relación (2.10) se obtiene aplicando la regla de la cadena en (2.9).

2.1.4. Campos de desplazamiento, de velocidad y aceleración

2.1.4.1. Campo de desplazamiento

Definición 2.10. El campo vectorial

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{x}_0 \quad (2.11)$$

representa el **campo de desplazamiento** en la descripción material (forma Lagrangiana).

Definición 2.11. El campo de desplazamiento en la descripción espacial (forma Euleriana) se define como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t). \quad (2.12)$$

Véase que ambas descripciones (material y espacial) del campo de desplazamiento son equivalentes en relación al movimiento $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}_0, t)$,

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{u}_0(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (2.13)$$

2.1.4.2. Campos de velocidad y aceleración

Definición 2.12. A la derivada del movimiento (2.4) con respecto al tiempo se denota como **descripción material del campo de velocidad**, y su expresión es la siguiente

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \chi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Definición 2.13. A la segunda derivada del movimiento (2.4) con respecto al tiempo se denota como **descripción material del campo de aceleración**, cuya expresión es

$$\mathbf{a}_0(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \chi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t^2}. \quad (2.15)$$

Los campos de velocidad y aceleración (2.14) y (2.15) pueden ser expresados a través del campo de desplazamiento en la descripción material (2.12), de la siguiente manera

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}}_0, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{a}_0(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} = \ddot{\mathbf{u}}_0. \quad (2.17)$$

Definición 2.14. A los campos $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ se les conoce como **descripción espacial del campo de velocidad y aceleración** respectivamente y se definen a partir de (2.14) y (2.15) de la siguiente manera

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{v}_0(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (2.18)$$

$$\mathbf{a}_0(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{a}_0(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t). \quad (2.19)$$

En virtud de (2.18), la relación (2.9) toma la forma

$$\dot{f}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)_x + \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right)_t \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (2.20)$$

cuya forma equivalente es

$$\dot{f} = \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i. \quad (2.21)$$

El segundo término del miembro derecho de la expresión (2.20) se denomina **razón de cambio convectiva** de f .

Si ahora pasamos a la derivada material del campo espacial suave de la velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ (campo vectorial por cierto) se obtiene el **campo de aceleración espacial**

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \frac{D\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (2.22)$$

y en una forma mas compacta

$$a_i = \dot{v}_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j. \quad (2.23)$$

Al primer término del miembro derecho de la expresión (2.22) se le conoce como **aceleración local** y al segundo **campo de aceleración convectivo**.

Dada la equivalencia entre la descripción material de velocidad dada por $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}, t)$ y el campo de velocidad espacial $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ en (2.18), este último puede ser expresado como la derivada material del movimiento $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}_0, t)$, o sea

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}} \quad (2.24)$$

El campo de de aceleración espacial se obtiene pasando a la derivada material de \mathbf{v}

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.25)$$

2.1.5. Gradiente de deformación

Esta sección será crucial para el desarrollo de este documento, debido a que el estudio de la deformación (cambios de tamaño y forma) que sufren los cuerpos (continuos) constituye el objetivo central de la Mecánica de los Sólidos. Primeramente debe establecerse un criterio que permita definir o identificar a un cuerpo deformado (o deformable). Esto se realiza a través de la siguiente definición

Definición 2.15. *Un cuerpo continuo se dice **deformable** si es capaz de cambiar de forma y de volumen; lo cual se garantiza si la relación (2.11) (o la (2.12)) cumple lo siguiente*

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{x}_0 \neq 0 \text{ (o } \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t) \neq 0) \quad (2.26)$$

para casi todos los valores de la variable t .

Definición 2.16. *La curva espacial en el instante t fijo se define por la ecuación paramétrica*

$$\mathbf{x} = \gamma(\xi, t) = \chi(\Psi(\xi, t), t). \quad (2.27)$$

Definición 2.17. *A $d\mathbf{x}$ se le denomina **vector espacial tangente** a la curva espacial y a $d\mathbf{x}_0$ **vector material tangente** a la curva material, los cuales se definen por las siguientes relaciones*

$$d\mathbf{x}_0 = \frac{\partial \Psi(\xi)}{\partial \xi} d\xi, \quad (2.28)$$

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \gamma(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi. \quad (2.29)$$

Definición 2.18. *Al tensor de segundo orden \mathbf{F} definido por la relación*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \chi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} = \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) \quad (2.30)$$

*se le denomina **gradiente de deformación***

Obsérvese que el elemento $d\mathbf{x}$ se puede expresar en función del elemento $d\mathbf{x}_0$, de la siguiente manera

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \chi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} d\mathbf{x}_0, \quad (2.31)$$

o más bien

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, t) d\mathbf{x}_0. \quad (2.32)$$

Dicha expresión define una transformación lineal que transforma vectores $d\mathbf{x}_0$ de la configuración de referencia κ_0 en vectores de la configuración actual κ_t por medio de la aplicación lineal \mathbf{F} . La magnitud física \mathbf{F} constituye una medida de la deformación de un cuerpo continuo en cualquier dirección de la región del espacio que ocupa. Es de hacerse notar que la cantidad \mathbf{F} determina un tensor de segundo orden.

Definición 2.19. *Si existen las derivadas con respecto a la posición (actual) del movimiento inverso χ^{-1} entonces existe el tensor inverso de \mathbf{F} denotado por \mathbf{F}^{-1} y se define como*

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t). \quad (2.33)$$

Dicha aplicación transforma elementos vectoriales de la configuración actual $d\mathbf{x}$ en elementos vectoriales de la configuración de referencia $d\mathbf{x}_0$ según la transformación lineal

$$d\mathbf{x}_0 = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (2.34)$$

Definición 2.20. *El tensor \mathbf{F} describe una **deformación no homogénea** de un cuerpo continuo si depende explícitamente de \mathbf{x}_0 . En caso contrario \mathbf{F} (en que \mathbf{F} no dependa de \mathbf{x}_0) describe una **deformación homogénea**.*

Si dV_0 y dV representan los elementos de volumen del cuerpo \mathcal{B} en las configuraciones de referencia y actual, la relación entre dichos elementos es la siguiente

$$dV = J(\mathbf{x}_0, t) dV_0. \quad (2.35)$$

Aquí $J(\mathbf{x}_0, t) = \det \mathbf{F}$ representa la **razón de volumen** (o simplemente **Jacobiano**). Para que el tensor \mathbf{F} sea invertible necesariamente $J(\mathbf{x}_0, t) \neq 0$ y además, como los elementos de volumen no pueden ser negativos se infiere que $J(\mathbf{x}_0, t) > 0$ para todo punto $\mathbf{x}_0 \in \kappa_0$ y para todo t .

Al elemento de volumen dV_0 se le denomina **elemento de volumen material** (o **sin deformar**). Por otra parte al elemento dV se le nombra **elemento de volumen espacial** (o **deformado**).

Definición 2.21. A partir del gradiente de deformación \mathbf{F} se definen los siguientes tensores,

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (2.36)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T, \quad (2.37)$$

conocidos como **tensor derecho de Cauchy-Green** y **tensor izquierdo de Cauchy-Green**, respectivamente.

2.1.5.1. Gradiente de velocidad material y espacial

Definición 2.22. La derivada con respecto a la posición actual \mathbf{x} de un campo espacial de velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ se define como

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (2.38)$$

Proposición 2.1. La razón de cambio del gradiente de deformación \mathbf{F} obedece la siguiente relación

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0, t) = \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t) \quad (2.39)$$

y se denomina **gradiente de velocidad material**.

Demostración. La relación (2.39) se demuestra tomando la derivada material del gradiente de deformación \mathbf{F} ,

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \chi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \left(\frac{\partial \chi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \right) = \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t). \quad (2.40)$$

□

Proposición 2.2. El gradiente de velocidad espacial \mathbf{L} se expresa en términos del gradiente de deformación según la relación

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.41)$$

Demostración. La demostración de (2.41) no resulta difícil pues,

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \dot{\chi}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \chi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} \right) \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.42)$$

□

2.2. Concepto de tensión

Cuando un cuerpo se encuentra libre de deformaciones todas sus partes se encuentran en equilibrio mecánico. Esto significa que si se considera una porción del sólido, la resultante de las fuerzas que sobre ella actúan debido a todas las demás, será cero en virtud de la conocida Tercera Ley de Newton (Acción y reacción). En caso contrario, cuando ocurre una deformación, cambia la distribución de moléculas y el cuerpo abandona el estado de equilibrio original (libre de deformaciones). Aparecen entonces fuerzas que tienden a restablecer el estado de equilibrio. A estas fuerzas, que aparecen en el interior del cuerpo sólido cuando es sujeto a deformaciones, se les denomina tensiones internas. Si no hay deformación es evidente que no existirán tensiones internas (Landau y Lifshitz 1969 [21]).

Estas tensiones internas en esencia se deben a las fuerzas de interacción entre moléculas. Ahora bien, la teoría de la elasticidad como toda teoría subyacente de la Mecánica de los Medios Continuos, constituye una teoría macroscópica. Esto significa que no hace especial hincapié en las fuerzas intermoleculares debido a que su radio de acción es de muy corto alcance (se extiende solamente a la vecindad de la molécula que lo ejerce cuyo orden de magnitud es del orden de la distancia entre moléculas); en efecto, la teoría de la elasticidad solo toma en cuenta distancias grandes en comparación con las distancias intermoleculares. Estas consideraciones hacen posible considerar el “radio de acción” de las fuerzas moleculares igual a cero en el marco de la teoría de la elasticidad (Landau y Lifshitz 1969 [21]); no obstante, el efecto de estas interacciones a escala global es lo que interesa a la teoría de la elasticidad por lo que a la hora de hablar de tensiones internas apenas se hace referencia a las interacciones moleculares, aunque no es menos importante conocer su origen. En lo adelante cuando se hable de “tensiones internas” se dará por entendido que nos estamos refiriendo a las fuerzas en el interior del cuerpo que oponen resistencia al cambio de forma y tamaño de un cuerpo sólido.

Es importante hacer notar que aquí no se traslada la noción de “molécula” a la de “partícula” sino que aquí una partícula agrupa un conjunto de moléculas.

2.2.1. Vectores de tracción y tensores de tensión

Consideremos un cuerpo \mathcal{B} continuo y deformable, que transita de la configuración de referencia κ_0 a otra arbitraria κ_t con frontera $\partial\kappa_t$ en el instante de tiempo t .

Consideremos un punto $\mathbf{x} \in \kappa_t$ que esté contenido en la superficie plana que divide al cuerpo en dos porciones. Sobre el mismo yacerá el origen del vector \mathbf{n} normal (unitario) a dicha superficie. En el elemento de superficie $ds \in \partial\kappa_t$ la **fuerza resultante en la configuración actual** que actúa sobre el mismo será

$$d\mathbf{f} = t ds. \quad (2.43)$$

Definición 2.23. El tensor $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ representa el **vector de tracción de Cauchy** (fuerza por unidad de superficie en la configuración actual) que actúa sobre el elemento de superficie ds con vector normal unitario \mathbf{n} .

Del mismo modo a como se hizo en la configuración actual, para un punto $\mathbf{x}_0 \in \kappa_0$ que esté contenido en una superficie (plana) divisoria sobre el cual esté ubicado el origen del vector unitario \mathbf{n}_0 normal a la superficie mencionada y considerando un elemento $ds_0 \in \partial\kappa_0$ de la misma, que rodee al punto \mathbf{x}_0 , se tendrá que la fuerza resultante en la configuración de referencia será

$$d\mathbf{f}_0 = \mathbf{t}_0 ds_0. \quad (2.44)$$

Definición 2.24. El vector $\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}_0(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ representa el **primer vector de tracción de Piola-Kirchhoff** (fuerza por unidad de superficie en la configuración de referencia) que actúa sobre el elemento de superficie ds_0 con un vector normal unitario \mathbf{n}_0 .

Usualmente los vectores \mathbf{t} y \mathbf{t}_0 son conocidos en la literatura como **fuerzas de contacto, vectores de tensión**, o sencillamente **cargas**.

La siguiente definición será muy importante a la hora de vincular el movimiento de un cuerpo continuo que transita desde la configuración de referencia κ_0 a la configuración actual κ_t .

Definición 2.25. La fuerzas resultantes de la configuración de referencia y actual, $d\mathbf{f}_0$ y $d\mathbf{f}$ obedecen la siguiente restricción

$$d\mathbf{f} = d\mathbf{f}_0 = t ds = \mathbf{t}_0 ds_0. \quad (2.45)$$

Teorema 2.1. *El vector de tensión en un punto del cuerpo es una aplicación lineal del vector normal a la superficie imaginaria que contiene a dicho punto*

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}, \quad (2.46)$$

$$\mathbf{t}_0(\mathbf{x}_0, t, \mathbf{n}_0) = \mathbf{P}(\mathbf{x}_0, t) \mathbf{n}_0. \quad (2.47)$$

donde los tensores $\boldsymbol{\sigma}$ y \mathbf{P} son conocidos como el **tensor de tensión de Cauchy** y el **primer tensor de tensión de Piola-Kirchoff**.

La demostración de este teorema puede consultarse en Hopzaphel 2000 [17].

Proposición 2.3. *El primer tensor de tensión de Piola-Kirchoff \mathbf{P} y el tensor de tensión de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ están vinculados por medio de la siguiente relación*

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T. \quad (2.48)$$

Al igual que el teorema 2.1, la demostración de la proposición 2.3 puede hallarse en Hopzaphel 2000 [17].

2.3. Ecuaciones de balance

El pilar fundamental de la Mecánica son las leyes de balance (o de conservación). Las mismas permanecen inalterables ante cualquier fenómeno que sea objeto de estudio de esta disciplina. Del mismo modo ocurre con la Mecánica de los Medios Continuos (una disciplina subyacente de la mecánica) en donde los principios generales o leyes de balance se suponen válidos con independencia del tipo de material, rango de desplazamientos o deformaciones. Aquí nos enfocaremos principalmente en la ley de balance de masa y del momento lineal.

2.3.1. Conservación de la masa

En la mecánica la masa es una magnitud que se emplea básicamente, para establecer el grado de inercialidad de los cuerpos; esto es, el grado en que estos se oponen al cambio del estado de su movimiento. O sea, cuerpos con mayor masa se mostrarán con una mayor resistencia al cambio del estado de su movimiento (o simplemente a moverse) y viceversa. Existe una estrecha relación entre la masa y la cantidad de materia de la que está constituida un cuerpo (aquí estamos considerando cuerpos macroscópicos constituidos por un gran número de partículas), o dicho de otra manera existe una estrecha relación entre la inercialidad de los cuerpos y de la materia que los forma. Esta relación y el carácter aditivo de la masa posibilita emplearla para determinar la cantidad de materia de un cuerpo, aunque es necesario recalcar, que el tipo de materia que posea un cuerpo también determina la cantidad de masa del mismo; por ello cuando se emplea la masa de un cuerpo como la cantidad materia (o sustancia) que contiene es necesario especificar su tipo.

En el marco de la física no relativista, la masa no puede crearse ni destruirse de manera espontánea, es decir no debe variar sin causa aparente. Si se introduce entonces la Mecánica de los Medios Continuos en el marco de la física no relativista resulta bastante obvio el que un cuerpo sólido conserve su masa (descartando cualquier tipo de reacción química que implique transformación de masa en energía) al pasar de un estado deformado a otro, si el sistema integrado por todas las partículas que constituyen a dicho cuerpo, no intercambia sustancia con otro sistema físico; o sea el sistema definido por el cuerpo es un **sistema cerrado**.

Si se entiende el cuerpo \mathcal{B} como un sistema cerrado, entonces deberá cumplirse la siguiente relación entre las masas de las configuraciones de referencia y actual

$$m(\kappa_0) = m(\kappa_t) > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.49)$$

La relación (2.49) constituye una manera de exponer lo que se conoce en la literatura como la **ley de conservación de la masa**, la cual constituye una ley fundamental de la mecánica (no relativista).

De (2.49) se desprende que la derivada material de la masa será

$$\frac{Dm(\kappa_0)}{Dt} = \frac{Dm(\kappa_t)}{Dt} = 0. \quad (2.50)$$

Si consideramos elementos de masa infinitesimales entonces (2.49) se puede escribir de forma diferencial (una forma equivalente a (2.50) para exponer la ley de conservación de la masa) como

$$dm(\mathbf{x}_0) = dm(\mathbf{x}, t) > 0. \quad (2.51)$$

Para cuerpos continuos, la masa en las configuraciones κ_0 y κ_t se describe a través de campos escalares continuos $\rho_0 = \rho(\mathbf{x}_0) > 0$ y $\rho = \rho(\mathbf{x}, t) > 0$ denominados **densidad de masa de referencia** y **densidad de masa espacial** dados por la siguiente definición.

Definición 2.26. El campo de densidad ρ_0 y ρ se definen a través de las siguientes relaciones,

$$\rho_0(\mathbf{x}_0) = \lim_{\Delta V_0(\kappa_0) \rightarrow 0} \frac{\Delta m(\kappa_0)}{\Delta V_0(\kappa_0)} = \frac{dm(\kappa_0)}{dV_0}, \quad (2.52)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta V(\kappa_t) \rightarrow 0} \frac{\Delta m(\kappa_t)}{\Delta V(\kappa_t)} = \frac{dm(\kappa_t)}{dV}, \quad (2.53)$$

donde Δm representa una función de incremento de masa de un elemento de incremento de volumen en las configuraciones de referencia y actual, denotados por dV_0 y dV , respectivamente.

En virtud de (2.52) y (2.53) los elementos infinitesimales de masa en las configuraciones de referencia y actual se escribirán como,

$$dm(\mathbf{x}_0) = \rho_0(\mathbf{x}_0) dV_0, \quad (2.54)$$

$$dm(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) dV. \quad (2.55)$$

Asumiendo el cumplimiento del principio de **conservación de la masa** (2.51), se igualan las relaciones (2.54) y (2.55)

$$\rho_0(\mathbf{x}_0) dV_0 = \rho(\mathbf{x}, t) dV > 0. \quad (2.56)$$

De (2.56) se deduce inmediatamente que el volumen crece a expensas del decrecimiento de la densidad, debido a que

$$\frac{\rho_0(\mathbf{x}_0)}{\rho(\mathbf{x}, t)} = \frac{dV}{dV_0}. \quad (2.57)$$

Por tanto si se cumple que

$$\frac{dV}{dV_0} > 1, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}, \quad (2.58)$$

entonces

$$\frac{\rho_0(\mathbf{x}_0)}{\rho(\mathbf{x}, t)} > 1 \Rightarrow \rho(\mathbf{x}, t) < \rho_0(\mathbf{x}_0) \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}. \quad (2.59)$$

Integrando (2.56) se obtiene la masa total de un sistema cerrado, que en nuestro caso será la masa total del cuerpo \mathcal{B} que permanecerá invariante ante cualquier cambio de configuración.

$$m = \int_{\kappa_0} \rho_0(\mathbf{x}_0) dV_0 = \int_{\kappa_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV. \quad (2.60)$$

Considerando (2.60) y (2.51) se obtiene la siguiente condición

$$\dot{m} = \frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\kappa_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0. \quad (2.61)$$

Definición 2.27. La forma **local** (o **diferencial**) de una ecuación es aquella en donde la misma mantiene su validez en todos los puntos de un cuerpo continuo \mathcal{B} para cada instante de tiempo t . En cambio la forma **global** (o **integral**) es aquella en la cual las magnitudes físicas son integradas en una región finita del espacio físico.

Un ejemplo de forma integral es la ecuación (2.60) mientras que de forma diferencial, la ecuación (2.61).

Por medio de la ley de conservación de la masa expresada en (2.61) es posible encontrar la relación existente entre la densidad de masa de referencia $\rho_0(\mathbf{x}_0)$ y la densidad de masa espacial $\rho(\mathbf{x}, t)$. Considerando la relación entre volúmenes (2.35) y la ecuación en forma integral (2.60) se verá que,

$$m = \int_{\kappa_0} \rho_0(\mathbf{x}_0, t) dV_0 = \int_{\kappa_0} \rho(\chi(\mathbf{x}_0, t), t) J(\mathbf{x}_0, t) dV_0. \quad (2.62)$$

Esto permite poder restar los integrandos de los miembros izquierdo y derecho bajo el signo de la integral

$$\int_{\kappa_0} (\rho_0(\mathbf{x}_0) - \rho(\chi(\mathbf{x}_0, t), t) J(\mathbf{x}_0, t)) dV_0 = 0, \quad (2.63)$$

dado que el volumen V_0 se asume arbitrario en la región κ_0 , el integrando de (2.63) se anula y en consecuencia

$$\rho_0(\mathbf{x}_0) = \rho(\chi(\mathbf{x}_0, t), t) J(\mathbf{x}_0, t), \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \kappa_0. \quad (2.64)$$

Definición 2.28. La relación (2.64) representa la **ecuación de balance de masa** en la descripción Lagrangiana.

Debido a que ρ_0 es independiente del tiempo, de (2.64) se desprende la siguiente relación

$$\overbrace{\rho(\chi(\mathbf{x}_0, t), t) J} = 0. \quad (2.65)$$

Partiendo de la relación (2.65) se puede deducir la siguiente ecuación (Apéndice B)

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0. \quad (2.66)$$

Definición 2.29. La ecuación (2.66) representa la **ecuación de balance de masa** en la descripción Euleriana

La ecuación (2.66) es frecuentemente conocida en la literatura como **ecuación de continuidad** y de ella se infiere la ley de conservación de la masa para un sistema cerrado.

Si la densidad de un cuerpo permanece constante en el tiempo, es decir que se anula $\dot{\rho}$ para cada valor de t (analizar la relación B.11 del Apéndice B); estaremos en presencia de un cuerpo que expande su volumen aumentando en masa (manteniendo la densidad constante) o bien un cuerpo que no crece ni en masa ni en volumen con la posibilidad de que experimente un cambio de forma. La segunda situación es el caso de un cuerpo incompresible.

Definición 2.30. Un cuerpo se dice **incompresible** si se cumple que

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ ó } J = 1 \quad (2.67)$$

2.3.2. Conservación del momento lineal

Consideremos un cuerpo continuo \mathcal{B} en la configuración κ_t en el instante de tiempo t , cuya superficie límite es $\partial\kappa_t$. Se considera un sistema cerrado con una ley de movimiento $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}_0, t)$, densidad de masa $\rho(\mathbf{x}, t)$ y con un campo de velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

Definición 2.31. Se define la forma global del momento lineal total \mathbf{l} por la función vectorial

$$\mathbf{l}(t) = \int_{\kappa_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\kappa_0} \rho_0(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, t) dV_0. \quad (2.68)$$

Definición 2.32. La derivada material de (2.68) representa la ecuación de balance del momento lineal, es decir,

$$\dot{\mathbf{i}}(t) = \frac{D}{Dt} \int_{\kappa_t} \rho \mathbf{v} dV = \frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \rho_0 \mathbf{v}_0 dV_0 = \mathbf{F}(t). \quad (2.69)$$

donde $\mathbf{F}(t)$ es la **fuerza resultante** que actúa sobre el cuerpo.

Definición 2.33. La fuerza resultante que se ejerce sobre un cuerpo continuo se descompone en las fuerzas que actúan sobre su volumen y las que se ejercen sobre la frontera que lo limita, es decir

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_V(t) + \mathbf{F}_S(t), \quad (2.70)$$

donde $\mathbf{F}_V(t)$ representa la fuerza neta que actúa sobre el volumen del cuerpo y $\mathbf{F}_S(t)$ la fuerza neta ejercida sobre la superficie del mismo.

Definición 2.34. Si $\partial\kappa_t$ es la frontera de una región arbitraria dada por la configuración κ_t con una tensión superficial dada por el vector de tracción de Cauchy $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$ entonces la fuerza resultante sobre la superficie \mathbf{F}_S estará determinada por la integral de superficie del vector de Cauchy sobre la frontera $\partial\kappa_t$,

$$\mathbf{F}_S(t) = \int_{\partial\kappa_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) ds. \quad (2.71)$$

Definición 2.35. El campo vectorial espacial $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ se denomina **fuerza del cuerpo actual** (fuerza por unidad de volumen en la configuración κ_t)

Definición 2.36. La fuerza total $\mathbf{F}_V(t)$ que actúa sobre el volumen del cuerpo se define como la integral de volumen de la fuerza del cuerpo \mathbf{b} en la configuración κ_t ,

$$\mathbf{F}_V(t) = \int_{\kappa_t} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV. \quad (2.72)$$

Tomando en cuenta (2.71) y (2.72) la fuerza resultante será

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_t} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\partial\kappa_t} \mathbf{t} ds + \int_{\kappa_t} \mathbf{b} dV = \mathbf{F}(t). \quad (2.73)$$

Para expresar a la ecuación material en términos de las coordenadas materiales se hace necesaria la siguiente definición.

Definición 2.37. El campo vectorial material $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_0(\mathbf{x}_0, t)$ se denomina **fuerza del cuerpo de referencia** (fuerza por unidad de volumen en la configuración de referencia κ_0).

A través de la relación (2.35) la integral (2.72) toma la forma

$$\int_{\kappa_t} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\kappa_0} \mathbf{b}(\chi(\mathbf{x}_0, t), t) J(\mathbf{x}_0, t) dV_0 = \int_{\kappa_0} \mathbf{b}_0(\mathbf{x}_0, t) dV_0. \quad (2.74)$$

Partiendo de la ecuación (2.74) se debe cumplir la siguiente condición

$$\int_{\kappa_0} (\mathbf{b}_0(\mathbf{x}_0, t) - J(\mathbf{x}_0, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)) dV_0 = 0, \quad (2.75)$$

Entonces si V_0 es cualquier volumen arbitrario de la región κ_0 se cumplirá que

$$\mathbf{b}_0(\mathbf{x}_0, t) = J(\mathbf{x}_0, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t). \quad (2.76)$$

Luego en base a (2.74) y (2.45) la ecuación de balance (2.69) del momento lineal en la descripción material será

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \rho_0 \mathbf{v}_0 dV_0 = \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{t}_0 ds_0 + \int_{\kappa_0} \mathbf{b}_0 dV_0. \quad (2.77)$$

A partir de la ecuaciones (2.73) y (2.77) puede encontrarse la forma local de la ecuación de balance del momento lineal o simplemente ecuación de movimiento de un cuerpo continuo (Ariel Ramírez 2014 [14]), la cual se escribe de la siguiente forma

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla_x \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}. \quad (2.78)$$

2.4. Relaciones constitutivas

De las leyes y principios generales, válidos en todas las ramas de la Mecánica de los Medios Continuos no son deducibles las particularidades de los materiales que ella misma estudia. Por esta razón se hace necesario siempre, introducir relaciones adicionales que sean afines al comportamiento físico real del material que se quiere modelar. A este tipo de relaciones adicionales se les denomina “relaciones constitutivas”, que a diferencia de los principios generales de la Mecánica de los Medios Continuos poseen una validez restringida. En esta sección nos enfocaremos en las relaciones constitutivas que son consecuentes con los materiales hiperelásticos (sólidos) y en particular en los que presentan la propiedad de isotropía y compresibilidad.

2.4.1. Ecuaciones constitutivas para materiales hiperelásticos

La noción básica del concepto de hiperelasticidad (y quizás intuitiva) se basa en el comportamiento no lineal de algunos materiales con propiedades elásticas. Los materiales con propiedades elásticas son aquellos que bajo determinadas condiciones retornan al estado original una vez que estén libres de cargas. Por otro lado, el comportamiento no lineal de dichos materiales se da por el hecho de que el tensor de tensiones σ no depende linealmente del tensor de deformación \mathbf{F} (incumplimiento de la ley de Hooke) como si ocurre en la teoría elástica lineal.

Definición 2.38. Un material se dice **hiperelástico** si existe una **energía de deformación** específica ψ diferenciable con respecto al gradiente de deformación.

Definición 2.39. La función ψ representa la energía libre de Helmholtz, de depender exclusivamente del gradiente de deformación \mathbf{F} o de algún tensor de tensión. Dicha energía es conocida como función de **energía de deformación**.

Definición 2.40. Un material hiperelástico se define matemáticamente por las relaciones,

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}, \quad (2.79)$$

$$\sigma = J^{-1} \frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T = J^{-1} \mathbf{F} \left(\frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right)^T, \quad (2.80)$$

denominadas **relaciones constitutivas**.

En este trabajo asumiremos que la energía de deformación ψ , depende exclusivamente del gradiente de deformación \mathbf{F} , lo cual es consecuente con aquellos materiales en donde sus constituyentes se distribuyen de manera uniforme, este es el caso de los **materiales homogéneos**. En los **materiales heterogéneos** la energía de deformación, además de depender de \mathbf{F} depende de la posición de los puntos del material.

2.4.1.1. Formas equivalente de la energía de deformación

En un material hiperelástico la energía de deformación puede escribirse como (para mayor información ver la sección B.1 del Apéndice B)

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{U}), \quad \forall \mathbf{F}, \quad (2.81)$$

siempre que \mathbf{F} admita la descomposición $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$, donde $\mathbf{R}(\mathbf{R} = \mathbf{R}^{-T})$ es un tensor ortogonal y $\mathbf{U}(\mathbf{U} = \mathbf{U}^T)$ un tensor simétrico.

2.4.1.2. Formas reducidas de las ecuaciones constitutivas

En la sección anterior mostramos que siempre existe un tensor simétrico \mathbf{U} a través del cual puede expresarse la función de energía ψ . Por esta razón la función de energía también se puede expresar en términos del tensor derecho de Cauchy-Green (expresión (2.36)) $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$ (recuérdese que el tensor \mathbf{F} tiene la forma $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$) que al igual que \mathbf{U} constituye un tensor simétrico, por tanto atendiendo a (2.81)

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{C}). \quad (2.82)$$

Proposición 2.4. Una forma reducida la relación constitutiva (2.80) para materiales hiperelásticos es la siguiente

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T. \quad (2.83)$$

Demostración. Si consideramos la derivada temporal de (2.82) y la propiedad (1.73) obtenemos la siguiente relación

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} = \text{tr} \left[\left(\frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right)^T \dot{\mathbf{F}} \right] = \text{tr} \left[\frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \left(\dot{\mathbf{C}} \right)^T \right], \quad (2.84)$$

desarrollando $\dot{\mathbf{C}}$ obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}} &= \left(\dot{\mathbf{F}}^T \right) \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^T \left(\mathbf{F}^{-T} \left(\dot{\mathbf{F}}^T \right) + \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \right) \mathbf{F} = \\ &= \mathbf{F}^T \left(\mathbf{L}^T + \mathbf{L} \right) \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (2.85)$$

de donde se desprende que

$$\left(\dot{\mathbf{C}} \right)^T = \dot{\mathbf{C}}. \quad (2.86)$$

Luego (2.84) toma la forma

$$\dot{\psi} = \text{tr} \left[\left(\frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \right) \dot{\mathbf{C}} \right] = \text{tr} \left[\frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \left(\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} \right)^T \right] + \text{tr} \left[\frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} \right]. \quad (2.87)$$

Escribiendo a (2.87) en forma mas compacta obtenemos que

$$\dot{\psi} = 2 \text{tr} \left[\frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} \right]. \quad (2.88)$$

Igualando términos de (2.87) con términos de (2.84) y tomando en cuenta (2.88) se tendrá que

$$\left(\frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right)^T = 2 \frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T. \quad (2.89)$$

Ahora sustituyendo (2.89) en (2.80) se obtiene (2.83) como se quería demostrar

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T. \quad (2.90)$$

□

2.4.2. Materiales hiperelásticos isotrópicos

Una magnitud que permanece inalterable ante rotaciones arbitrarias en el espacio (físico), responde a una propiedad de **isotropía**. La finalidad de esta sección es adaptar esta propiedad a la energía de deformación ψ respaldada por la idea física de que la respuesta del material en un experimento de deformación-tensión es equivalente en todas las direcciones del espacio.

Tomemos en consideración un punto arbitrario \mathbf{x}_0 de la configuración de referencia κ_0 al cual le corresponde un punto \mathbf{x} de la configuración actual κ_t en el instante t según una ley de movimiento $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}_0, t)$. Si ahora el punto \mathbf{x}_0 es trasladado a través de un vector \mathbf{c} y rotado por medio de un tensor ortogonal \mathbf{Q} , obtenemos un punto en una nueva configuración de referencia κ_0^* de acuerdo con la siguiente transformación de coordenadas:

$$\mathbf{x}_0^* = \mathbf{c} + \mathbf{Q} \mathbf{x}_0. \quad (2.91)$$

Si ahora consideramos una ley de movimiento, que transforma puntos de la configuración κ_0^* en puntos de la configuración actual κ_t en el instante t , $\chi(\mathbf{x}_0^*, t)$, esta debe coincidir con la ley $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}_0, t)$ (aquí estamos dando por sentado que estamos tratando solo con materiales isotrópicos)

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}_0, t) = \chi^*(\mathbf{x}_0^*, t). \quad (2.92)$$

Tomando en cuenta (2.91) y aplicando la regla de la cadena, el gradiente de deformación \mathbf{F} tomará la forma

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0^*} \mathbf{Q} = \mathbf{F}^* \mathbf{Q}, \quad (2.93)$$

donde $\mathbf{F}^* = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^*}$ representa el gradiente de deformación con respecto a la configuración κ_0^* .

Dado que el tensor \mathbf{Q} es ortogonal ($\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-T}$) de (2.93) se desprende que

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F} \mathbf{Q}^T. \quad (2.94)$$

Todo lo anteriormente expuesto permite introducir la siguiente definición

Definición 2.41. *Un material es **isotrópico** con respecto a la configuración κ_0 , si coinciden los valores de la energía de deformación $\psi(\mathbf{F})$ y $\psi(\mathbf{F}^*)$ cualquiera sea el tensor \mathbf{Q} , o sea que*

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{F}^*) = \psi(\mathbf{F} \mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{Q}. \quad (2.95)$$

El caso en donde no se cumple la definición 2.41 es el que atañe a los materiales **anisotrópicos**.

Como se vió en la sección anterior, la función de energía puede escribirse como $\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{C})$; entonces atendiendo a (2.95), tendremos que

$$\psi(\mathbf{C}) = \psi(\mathbf{C}^*) = \psi((\mathbf{F}^*)^T \mathbf{F}^*) = \psi(\mathbf{Q} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{Q}^T). \quad (2.96)$$

Atendiendo a (2.81) la energía de deformación puede escribirse como

$$\psi(\mathbf{C}) = \psi(\mathbf{B}). \quad (2.97)$$

Esta relación permite escribir la relación constitutiva de σ en función del tensor izquierdo de Cauchy-Green \mathbf{B} de la siguiente manera,

$$\sigma = 2J^{-1} \frac{\partial \psi(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B} = 2J^{-1} \mathbf{B} \frac{\partial \psi(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}}. \quad (2.98)$$

2.5. Nociones de teoría de mezclas

El presente capítulo ha estado encaminado fundamentalmente, a definir las magnitudes básicas de la Mecánica de los Medios Continuos, considerando a estos constituidos por un solo componente. Esta sección, por su parte se propone ser más abarcadora (o más general si se quiere), por introducir una teoría que adapta a las magnitudes básicas del presente capítulo a medios conformados por varios componentes, conocida por **Teoría de Mezclas**.

El aspecto esencial de la teoría de mezclas radica en poder separar un medio continuo (mezcla) en diferentes componentes, comprendiendo a cada uno como un medio continuo. Cada componente de la mezcla se distingue por su densidad de masa, tensor de tensión, energía, temperatura, además de otras magnitudes. En esta sección definiremos algunas de estas magnitudes para cada componente de la mezcla y que luego serán necesarias. (Rayagopal y Tao [4]).

Consideremos que se está en presencia de una mezcla constituida por N componentes bien diferenciados por las magnitudes mencionadas en el párrafo anterior. El índice $\alpha = 1, \dots, N$ se emplea para enumerar los componentes de la mezcla.

Definición 2.42. *El vector de posición de la configuración actual \mathbf{x} se relaciona con el α -ésimo componente $\mathbf{x}_{\alpha 0}$, en cada momento de tiempo t a través de la aplicación χ_α , denominada movimiento del α -ésimo componente, es decir,*

$$\mathbf{x} = \chi_\alpha(\mathbf{x}_{\alpha 0}, t). \quad (2.99)$$

Definición 2.43. El movimiento inverso de χ_α se denota por χ_α^{-1} y se define como

$$\mathbf{x}_{\alpha 0} = \chi_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (2.100)$$

Definición 2.44. La descripción material de los campos de velocidad y aceleración del α -ésimo componente se definen de la siguiente manera

$$\mathbf{v}_{\alpha 0}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \chi_\alpha(\mathbf{x}_{\alpha 0}, t)}{\partial t}, \quad (2.101)$$

$$\mathbf{a}_{\alpha 0}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \chi_\alpha(\mathbf{x}_{\alpha 0}, t)}{\partial t}. \quad (2.102)$$

Definición 2.45. La descripción espacial de los campos de velocidad y aceleración del α -ésimo componente se definen como

$$\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial \chi_\alpha(\mathbf{x}_{\alpha 0}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_{\alpha 0} = \chi_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t)}, \quad (2.103)$$

$$\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial \chi_\alpha(\mathbf{x}_{\alpha 0}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_{\alpha 0} = \chi_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t)}. \quad (2.104)$$

Definición 2.46. La derivada material que actúa sobre el α -ésimo componente de la mezcla se define de la siguiente forma

$$\frac{D_\alpha(\bullet)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}})(\bullet), \quad (2.105)$$

donde $\nabla_{\mathbf{x}}$ representa el operador gradiente con respecto a la posición espacial \mathbf{x} .

Definición 2.47. El gradiente de deformación en $(\mathbf{x}_{\alpha 0}, t)$ con respecto a la configuración $\kappa_{\alpha 0}$ se define como

$$\mathbf{F}_\alpha = \nabla_{\mathbf{x}_{\alpha 0}} \chi_{\alpha 0}(\mathbf{x}_{\alpha 0}, t), \quad (2.106)$$

donde $\nabla_{\mathbf{x}_{\alpha 0}}$ constituye el operador gradiente actuando respecto a $\mathbf{x}_{\alpha 0}$.

Definición 2.48. El gradiente de velocidad correspondiente al α -ésimo componente de la mezcla se define a través de la siguiente relación

$$\mathbf{L}_\alpha = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (2.107)$$

Definición 2.49. La densidad de la mezcla está dada por la fórmula

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^N \rho_\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (2.108)$$

La cantidad definida como

$$\phi_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_\alpha(\mathbf{x}, t)}{\rho(\mathbf{x}, t)} \quad (2.109)$$

representa la fracción del volumen ocupada por el α -ésimo componente.

La mezcla se encuentra saturada cuando cumple la siguiente condición

$$\sum_{\alpha=1}^N \phi_\alpha(\mathbf{x}, t) = 1. \quad (2.110)$$

El sentido físico de esta condición radica en expresar la conservación del número de componentes. Es decir, no desaparecen ni se crean nuevos componentes.

Definición 2.50. La velocidad promedio de la mezcla \mathbf{v} vendrá dada por la siguiente expresión

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=1}^N \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha. \quad (2.111)$$

Definición 2.51. La velocidad de difusión del α -ésimo componente se define por la relación

$$\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}. \quad (2.112)$$

siendo \mathbf{u}_α la velocidad del α -ésimo componente en relación a la velocidad promedio.

Definición 2.52. La derivada material para la mezcla es

$$\frac{D(\bullet)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}})(\bullet). \quad (2.113)$$

El vector de tracción que le corresponde a cada componente puede ser expresado de la siguiente manera

$$\mathbf{t}_\alpha = (\sigma_\alpha)^T \mathbf{n} = \sigma_\alpha \mathbf{n}. \quad (2.114)$$

El carácter aditivo del vector de tracción permite que para toda la mezcla el vector de tracción total sea

$$\mathbf{t} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{t}_\alpha. \quad (2.115)$$

En la forma diferencial (o local) las respectivas ecuaciones de balance masa y del momento lineal para un componente arbitrario α se escriben de la siguiente forma (Rajagopal y Tao [4])

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = \Gamma_\alpha \rho_\alpha, \quad (2.116)$$

$$\frac{\partial (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \otimes \mathbf{v}_\alpha) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_\alpha + \mathbf{b}_\alpha + \mathbf{q}_\alpha + \rho_\alpha \Gamma_\alpha \mathbf{v}_\alpha. \quad (2.117)$$

La ecuación (2.116) contempla la posibilidad de intercambio de masa entre los componentes de la mezcla, si se supone el miembro derecho de dicha ecuación $\Gamma_\alpha \rho_\alpha$ distinto de cero para cada valor de α . El factor $\Gamma_\alpha \rho_\alpha$ representa la proporción de suministro de masa que cede o que obtiene el α -ésimo componente de la mezcla en dependencia del signo de Γ_α que no es más que la tasa de crecimiento o disminución con que varía la masa del α -ésimo componente. Si $\Gamma_\alpha > 0$ entonces el α -ésimo componente estará ganando en masa (o en materia), si por el contrario $\Gamma_\alpha < 0$ el α -ésimo componente estará cediendo parte de su masa.

En la ecuación (2.117) el vector \mathbf{q}_α representa la fuerza de interacción local entre los componentes de la mezcla. El término $\rho_\alpha \Gamma_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ es la contribución al momento debido a la variación de masa $\Gamma_\alpha \rho_\alpha$ del α -ésimo componente (Rajagopal y Tao [4]).

2.5.1. Ecuación de balance de masa para la mezcla

Una mezcla puede considerarse como un sistema cerrado con respecto a la masa (esto es, un sistema que no intercambia masa con ningún otro), por tal motivo debe cumplirse la ley de conservación de la masa para toda la mezcla y la ley que lo expone debe ser de la misma forma que (2.66). Considerando (2.108), (2.116) y (2.66) tendremos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha \rho_\alpha = 0, \quad (2.118)$$

es decir, la ley de conservación de la masa de la mezcla también puede deducirse a través de la condición

$$\sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha \rho_\alpha = 0. \quad (2.119)$$

2.5.2. Ecuación de movimiento para la mezcla

Proposición 2.5. *La ecuación de balance del momento lineal para la mezcla es la siguiente*

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}. \quad (2.120)$$

Demostración. Empecemos sumando por el índice α en la ecuación (2.117)

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial(\rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha})}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \nabla_{\mathbf{x}} (\rho \mathbf{v}_{\alpha} \otimes \mathbf{v}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^N \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{b}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N (\rho_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{q}_{\alpha}). \quad (2.121)$$

Haciendo uso de (2.112) y considerando la linealidad del producto tensorial (ver las propiedades (1.21)-(1.23)) se tiene que

$$\sum_{\alpha=1}^N (\rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \otimes \mathbf{v}_{\alpha}) = \rho \mathbf{v}_{\alpha} \otimes \mathbf{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{u}_{\alpha}. \quad (2.122)$$

Ahora teniendo en cuenta (2.122) y agrupando términos en (2.121) tendremos

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial(\rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha})}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^N \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{u}_{\alpha} \right) + \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{b}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N (\rho_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{q}_{\alpha}). \quad (2.123)$$

Considerando (2.108) y (2.111) se puede escribir (2.123) como

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^N \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{u}_{\alpha} \right) + \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{b}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N (\rho_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{q}_{\alpha}) \quad (2.124)$$

y comparando término a término con (2.117) se puede definir $\boldsymbol{\sigma}$ como

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^N \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{u}_{\alpha}, \quad (2.125)$$

luego

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} + \sum_{\alpha=1}^N (\rho_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{q}_{\alpha}). \quad (2.126)$$

Obsérvese que

$$\mathbf{b} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{b}_{\alpha}. \quad (2.127)$$

Aunque se ha simplificado (2.123) prescindiendo de gran parte de sus sumatorias, todavía no estamos en condiciones de establecer la ecuación de movimiento, ya que en (2.126) no figura la derivada material de la velocidad $D\mathbf{v}/Dt$.

El miembro derecho de (2.126) puede escribirse como

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \quad (2.128)$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \nabla_{\mathbf{x}} \rho. \quad (2.129)$$

Utilizando las propiedades (1.90) y (1.92) el miembro derecho de (2.126) puede escribirse como

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \quad (2.130)$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \nabla_{\mathbf{x}} \rho. \quad (2.131)$$

Empleando (1.17) y expresando $\nabla_{\mathbf{x}}\rho$ en función de un vector base f^i podremos escribir a $(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \nabla_{\mathbf{x}}\rho$ de la forma

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \nabla_{\mathbf{x}}\rho = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \mathbf{f}^i = \mathbf{v} \left[\mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i} \mathbf{f}^i \right) \right] = \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\rho), \quad (2.132)$$

entonces agrupando convenientemente en (2.129) tendremos que

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \rho) + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\rho) \right) \right] + \rho (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}) \mathbf{v}. \quad (2.133)$$

Si se mira con atención (2.133), el término entre corchetes representa la ley de conservación de la masa expresada en (2.118) por tal motivo (2.128) se transforma en

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}) \mathbf{v}. \quad (2.134)$$

Ahora, del miembro izquierdo de (2.134) se puede extraer la derivada material de la velocidad.

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}, \quad (2.135)$$

entonces igualando (2.135) con (2.126) se obtiene la forma local de la ecuación de movimiento

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} + \sum_{\alpha=1}^N (\rho_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{q}_{\alpha}). \quad (2.136)$$

La ecuación (2.136) debe tener la misma forma que la de un solo componente continuo, es decir que dicha ecuación debe ser igual a 2.78, por ello el último sumando del miembro derecho de dicha ecuación tendrá que anularse

$$\sum_{\alpha=1}^N (\rho_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{q}_{\alpha}) = 0. \quad (2.137)$$

Tendremos finalmente la forma diferencial (o local) de la ecuación de movimiento para la mezcla

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}. \quad (2.138)$$

□

Obsérvese que la condición (2.137) constituye una ecuación de ligadura que relaciona las fuerzas de interacción local entre componentes con las fuerzas causadas por la reconversión de masa entre los mismos.

2.6. Elementos de la teoría de las múltiples configuraciones naturales

La teoría de las múltiples configuraciones naturales se encarga de la modelación de los cuerpos sólidos que cambian de volumen incrementando de manera simultánea la masa y la tensión. El rasgo principal de dicha teoría es la separación del crecimiento de la masa y de la tensión en dos contribuciones independientes.

Consideremos un material que posea la propiedad de **elasticidad instantánea**. Esto quiere decir que una vez que el material es retirado de su estado de equilibrio en intervalos considerablemente pequeños de tiempo, sin la intervención de procesos disipativos (consideramos los procesos disipativos como aquellos en los que el trabajo mecánico se transforma en energía térmica) la respuesta del mismo es elástica. O sea que una vez que sea retirado el agente externo que modificó el estado original de equilibrio del cuerpo, este retornará a dicho estado. Consideremos el movimiento χ_{α} del α -ésimo componente desde su configuración de referencia κ_{α}^0 (la cual se asume libre de tensión) a la configuración actual κ_{α}^t . Manteniendo la masa constante puede pasarse de la configuración κ_{α}^t a otra que define un estado libre de tensión por medio de un proceso que se asume no disipativo. A esta configuración libre de tensión que alcanza el material se le denomina **configuración natural** y se le denota por κ_{α}^{el} .

La deformación que sufre el cuerpo al pasar de la configuración natural κ_α^{el} a la configuración actual κ_t se determinará a través del gradiente de deformación \mathbf{F}_α^{el} , en cambio la transición de κ_α^0 a la configuración κ_α^{el} se describe a través del tensor \mathbf{G}_α y como es sabido, la deformación que sufre el cuerpo en su totalidad, al pasar de la configuración κ_α^0 a κ_α^t se describe a través del tensor de deformación \mathbf{F}_α (figura 2.1).

Entonces el tensor de deformación \mathbf{F}_α admite la siguiente descomposición

$$\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^{el} \mathbf{G}_\alpha. \quad (2.139)$$

En (2.139) se han separado las contribuciones de puro crecimiento y de la deformación que induce tensión. Debido a que la masa es preservada desde la configuración κ_α^{el} a la κ_α^t el tensor \mathbf{F}_α^{el} solo puede estar relacionado con las tensiones presentes en el material (ya sea por la acción de las fuerzas externas ejercidas sobre el material o por las tensiones residuales que aparecen como consecuencia de su crecimiento). Por tal motivo el tensor \mathbf{G}_α se relaciona directamente con el crecimiento del cuerpo por lo que se denominará como **tensor de crecimiento**. Es de hacerse notar que dado que el gradiente de deformación es inversible (ver relación 2.33), los tensores \mathbf{F}_α^{el} y \mathbf{G}_α también lo serán.

Es necesario hacer una serie de aclaraciones en relación a la configuración natural κ_α^{el} , y es que la misma no es compatible con verdaderos estados físicos (Ambrossi y Mollica 2004 [11]). Esto quiere decir que el cuerpo no evoluciona temporalmente hacia esa configuración, por lo cual, las herramientas tradicionales del cálculo diferencial resultan inefectivas para reproducirla. Las configuración natural se alcanza previendo movimientos ficticios (autónomos) y homogéneos del cuerpo que no obedecen ninguna restricción matemática o ley física. Este inconveniente puede ser superado si estos movimientos ficticios son tales que el tensor de deformación asociado a este movimiento (el ficticio) coincida con el gradiente de deformación del movimiento actual en el punto material en cuestión en cada instante de tiempo t (Ariel Ramírez 2014 [14], Ariel Ramírez 2012 [15]).

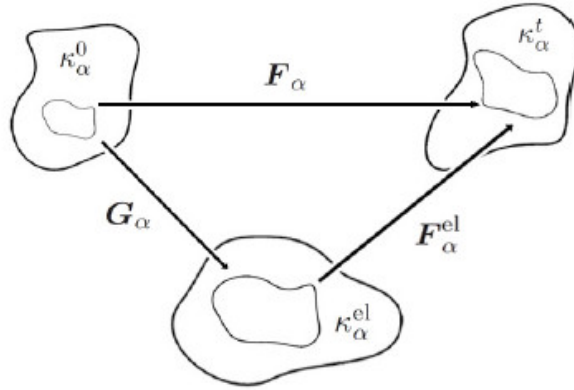


Figura 2.1. Configuraciones de un cuerpo deformado.

Ahora si $\rho_\alpha(\mathbf{x}_{\alpha 0}) = \rho_\alpha(\chi_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t), 0)$ representa el campo de densidad del cuerpo en el instante $t = 0$, entonces el elemento infinitesimal de masa en la configuración de referencia será

$$dm_{\alpha 0} = \rho_0(\mathbf{x}_{\alpha 0}) dV_{\alpha 0}. \quad (2.140)$$

Análogamente, tendremos para la configuración actual κ_α^t que

$$dm_\alpha = \rho_\alpha(\mathbf{x}, t) dV_\alpha. \quad (2.141)$$

Hasta ahora hemos asumido que la configuración natural es única para cada instante de tiempo t , o sea que existe una correspondencia “uno a uno” entre el tiempo y dicha configuración. Una de las consecuencias de esto es que el campo de densidad de la configuración natural κ_α^{el} será idéntico al campo de la configuración de referencia κ_α^0 en cada instante de tiempo t (Ariel Ramírez 2014 [14], Ariel Ramírez 2012 [15])

$$\rho_\alpha(\mathbf{x}_{\alpha 0}, t) = \rho_{\alpha 0}(\mathbf{x}_{\alpha 0}). \quad (2.142)$$

Por lo tanto el elemento de masa de la configuración actual será

$$dm_\alpha = \rho_\alpha(\mathbf{x}_{\alpha 0}) dV_\alpha. \quad (2.143)$$

Si dV_α^{el} representa el elemento de volumen del cuerpo en la configuración de referencia, el elemento de masa del mismo en κ_α^0 será

$$dm_\alpha = \rho(\mathbf{x}_{\alpha 0}) dV_\alpha^{el}. \quad (2.144)$$

Dividiendo (2.144) entre (2.141) y considerando (2.35) se obtiene que

$$J_{\mathbf{G}_\alpha} = \det \mathbf{G}_\alpha = \frac{dV_\alpha^{el}}{dV_\alpha} = \frac{dm_\alpha}{dm_{\alpha 0}}. \quad (2.145)$$

Bastará con conocer el tensor \mathbf{G}_α para determinar si hay crecimiento o decrecimiento.

Capítulo 3

Modelación del crecimiento del tumor

3.1. Descripción fenomenológica del crecimiento del tumor

El objetivo de esta sección es dar una breve disertación de los principales aspectos biológicos que guardan una estrecha relación con la aparición del cáncer, además de brindar una descripción de las diferentes etapas por las que transita.

3.1.1. Ciclo celular

La célula es la mínima expresión de los organismos vivos de donde no está exento el cáncer. Es por ello que para aproximarse a una correcta comprensión de esta dolencia es imprescindible tener claro el proceso natural de propagación de una célula sana, conocido como ciclo celular.

Se entiende como ciclo celular a la secuencia de eventos que conducen a la reproducción de la célula. Los organismos vivos presentan dos vías de reproducción, directa o indirecta. La vía directa es propia de las entidades unicelulares donde a partir de una célula madre nacen dos células hijas genéticamente idénticas las cuales luego de madurar se convierten en organismos distintos. La vía indirecta de reproducción es la correspondiente a los organismos pluricelulares en donde la división celular solo constituye un paso intermedio para la reproducción de la especie. En este tipo de organismos la división celular también juega un papel importante en el reemplazo de células perdidas por efecto del tiempo (muerte celular), agresiones externas o simplemente mal funcionamiento.

Es de suma importancia tener en cuenta que en las células que conforman los tejidos de los organismos vivos o células somáticas, el material genético producto de la división celular es una copia exacta del de la célula madre, de igual manera ocurre con las características funcionales y estructurales de los descendientes, proceso que a menos que se produzcan mutaciones se mantendrá inalterado. Para el correcto fin de este propósito es necesario que se coordinen a nivel microscópico una serie de procesos que integran el denominado sistema de control del ciclo celular y cuyas fallas serán decisivas en la aparición del cáncer.

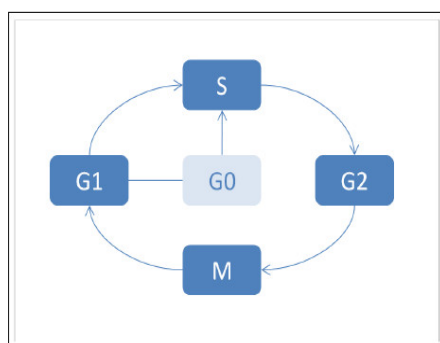


Figura 3.1. Digrama del ciclo celular.(Sebastián 2010 [16])

A grandes rasgos el ciclo celular (para células eucariotas) se divide en dos fases esenciales conocidas como interfase y mitosis figura 3.1. La interfase consiste en una serie de procesos que tienen como objetivo la preparación de

la madre para la división celular. Esta fase comienza por la con la etapa G1 que se caracteriza por una alta actividad bioquímica. En este proceso la célula incrementa su material enzimático, duplica los organelos y otras estructuras que pertenecen al citoplasma aumentando de tamaño (Homphrey 2012 [6], Sebastián 2010 [16]).

Si el sistema de control recibe señales externas que codifiquen que la célula no necesita duplicarse, la misma puede pasar a un estado de senescencia denominado G0.

Culminada la fase G1 se da paso a la fase S (síntesis) en la cual se verifica si la división celular es exitosa o no. En esta fase se duplica el material genético transformándose en cromosomas y necrótidos. La fase S culmina con la G2 que consiste en la organización interna y preparación para la división. Finalmente se alcanza la etapa que concluye el ciclo celular (mitosis) correspondiente a la división nuclear y celular. Esta fase es denotada como M (Homphrey 2012 [6], Sebastián 2010 [16]).

3.1.2. El cáncer y el ciclo celular

Un tejido es una agrupación de células que poseen características funcionales comunes. En un organismo complejo como el humano, cada tejido posee un tamaño óptimo, el cual se corresponde con las necesidades del cuerpo y es regulado por la acción de señales químicas y mecánicas externas. Para alcanzar y mantener el tamaño de forma óptima, el control del ciclo celular juega un papel fundamental y la asociación de células brinda la posibilidad de que no se invadan los tejidos circundantes.

La principal característica del cáncer es la disminución de la eficacia de las señales que detienen la proliferación celular, generándose tejidos que resultan agresivos y que crecen descontroladamente. A semejantes tejidos se les conoce como neoplasias. En otras palabras, la acumulación de mutaciones hace a las células neoplásicas más resistentes a la muerte celular y por ende no mueren cuando deben.

Desde un enfoque evolucionista es posible afirmar que las células cancerígenas le transmiten al tumor una ventaja genética que le confiere una mayor competitividad en la selección natural. El incremento de su potencial competitivo acarrea una mayor actividad y por ende una mayor necesidad de nutrientes, ocasionando que el ambiente sea el menos propicio para el desarrollo de células sanas. El factor que desencadena la mayor parte de los cánceres consiste en una simple mutación genética que le permite a la célula defectuosa generar descendientes más vigorosos que los restantes del tejido como se muestra en la figura 3.2. Los nuevos descendientes serán virtualmente clones de la célula defectuosa dando origen a una proliferación con carácter exponencial de la mutación original.

La situación puede tornarse aun más compleja, debido a que la acción acumulada que produjo la mutación original genera que con el transcurso del tiempo nuevas mutaciones afecten a las células cancerígenas, lo que implica un incremento de la capacidad de proliferación y descontrol sobre los mecanismos de regulación del ciclo celular (Sebastián 2010 [16]).

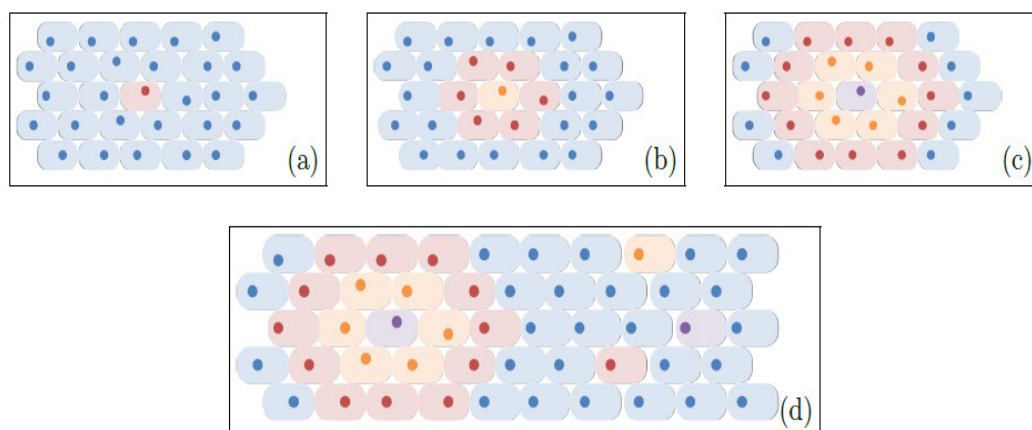


Figura 3.2. Desencadenamiento de las mutaciones que contribuyen a la propagación del cáncer.(Sebastián 2012 [16])

3.1.3. Etapas del cáncer

Los tumores se clasifican en tres fases bien definidas: la fase avascular, la fase vascular y metástasis. La fase avascular es aquella cuyo rasgo distintivo radica en que las células que conforman al tumor se agrupan formando agregados aproximadamente esféricos. Esta peculiaridad traerá consigo serias implicaciones para el crecimiento del tumor, debido a la manera desigual en que son consumidos los nutrientes que garantizan la supervivencia y reproducción de las células tumorales. En el ambiente propicio para el desarrollo de un tumor avascular, la mayor proporción de nutrientes se hallará siempre en la periferia del mismo. Estos serán difundidos hacia el interior del tumor y en su paso serán gradualmente consumidos por las células que lo integran, de forma tal que la disponibilidad de nutrientes decrece según lo hace el radio del tumor. Con el paso del tiempo irá aumentando la carencia relativa de nutrientes por parte de las células más alejadas de la superficie que separa al tumor del ambiente, hasta alcanzar el punto de encontrarse totalmente desprovistas de nutrientes y en consecuencia comienzan a fallecer. La porción del espacio en donde se hallan confinadas las células muertas del tumor es conocida como región necrótica. En esta etapa del tumor también existirán otras dos regiones conocidas como quiescente y proliferativa. La primera constituye una región intermedia entre la necrótica y la segunda es aquella en donde las células pasan a un estado de senescencia en la cual no se duplican. Como su nombre lo indica, la región proliferativa es aquella en donde existe una alta tasa de proliferación celular; es en esta región en donde las células aprovechan al máximo los nutrientes para aumentar de tamaño y duplicarse. Por tal motivo, en la fase avascular, el tumor no crece más allá de cierto tamaño, en el cual existe aproximadamente un equilibrio entre la proliferación y la muerte celular. Una manera que tiene el tumor de revertir la carencia de nutrientes es la angiogénesis, proceso en el cual el tumor desarrolla sus propias vías de suministro de nutrientes creando sus propios vasos sanguíneos. La angiogénesis es el proceso que da paso a la fase vascular del tumor. Una vez que el tumor ha adquirido sus propios vasos sanguíneos, las células tumorales emigran a través del sistema circulatorio esparciéndose por todo el cuerpo humano (Chapman 2007 [5]).

3.2. Hipótesis y consideraciones para el crecimiento del tumor

Se considera al tumor como un sólido continuo bajo las siguientes consideraciones:

- Se modela un tumor que crece de forma esférica tal y como se describe en los experimentos hechos por Hemlinger et al. [3]
- La respuesta del cuerpo continuo que se le atribuye al tumor es hiperelástica.
- Se asume que el cuerpo no rota.
- El sólido se considera compresible.
- Es empleada la teoría de las múltiples configuraciones naturales, lo cual facilita modelar simultáneamente el crecimiento de masa y las tensiones que acompañan a dicho crecimiento, además de hacer uso del acercamiento Lagrangiano para estudiar el problema del crecimiento.
- Se presupone que el crecimiento de la masa del tumor es consecuencia del aumento de la masa y del número de células, considerando dicho crecimiento isotrópico y no homogéneo.
- Existen dos maneras en que la energía es suministrada al sistema conformado por el tumor: trabajo de fuerzas externas equilibradas con las internas y la energía que es proveída exclusivamente para el crecimiento.
- Se toma en consideración la contribución de los nutrientes en el crecimiento del tumor, los cuales son difundidos hacia el interior del tumor en donde son absorbidos. Lo mismos se suponen uniformemente distribuidos en la frontera del tumor.
- Se desprecia cualquier tipo de interacción entre los nutrientes y las células del tumor.
- El incremento de la masa de las células es equivalente al aumento de su tamaño.
- Los nutrientes que consume el tumor y las células que lo conforman constituyen una mezcla saturada (ver expresión 2.110).

Como la mayoría de las ecuaciones se referirán a la fase sólida del tumor se suprime el índice α en las mismas.

3.3. Aplicación de la teoría de las múltiples configuraciones naturales al crecimiento de un tumor sólido

La teoría de las múltiples configuraciones naturales constituye una herramienta imprescindible para el estudio del crecimiento de un tumor que evoluciona de manera similar a como lo realiza un cuerpo sólido (hiperelástico), una vez que ha abandonado su estado de equilibrio original (sin deformaciones) y transita por una secuencia de configuraciones que describen estados deformados. Una peculiaridad de este tipo de tumores (tumores en fase avascular) que dificulta en gran medida el estudio de la dinámica de su crecimiento, es que el cambio de masa del mismo trae aparejado un cambio en el estado de tensión del tumor y viceversa, por lo que modelar simultáneamente estos cambios se convierte en una gran problemática a la hora de establecer un nexo causal entre los cambios de masa y de tensión (Graziano y Preziosi [12]). La teoría de las múltiples configuraciones naturales desarrollada en el capítulo 2 permite darle solución a esa problemática de una manera bastante sencilla, separando los cambios de masa y de tensión en contribuciones independientes. Aquí el crecimiento del tumor estará separado en dos contribuciones: una contribución en la cual el tumor solo crece por el incremento de la masa de sus células y otra en la que se contempla el crecimiento del tumor como consecuencia del incremento del número de células. De igual forma que en la sección 2.6 existirá una contribución en donde estarán presentes todas las tensiones que actúan sobre el tumor, en la cual su masa es preservada.

El tensor de deformación \mathbf{F} se descompone de manera idéntica que en (2.139) (se ha suprimido el índice α puesto que solo estamos considerando un solo componente conformado por las células que integran el tumor)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{el} \bar{\mathbf{G}}. \quad (3.1)$$

La segunda contribución al crecimiento puede hallarse descomponiendo a $\bar{\mathbf{G}}$ en dos tensores, desde luego invertibles.

$$\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{G}^* \mathbf{G} = \mathbf{G} \mathbf{G}^*. \quad (3.2)$$

Entonces entre la configuración κ_0 y κ^{el} existirá una configuración intermedia denotada por κ^{el*} (figura 3.3).

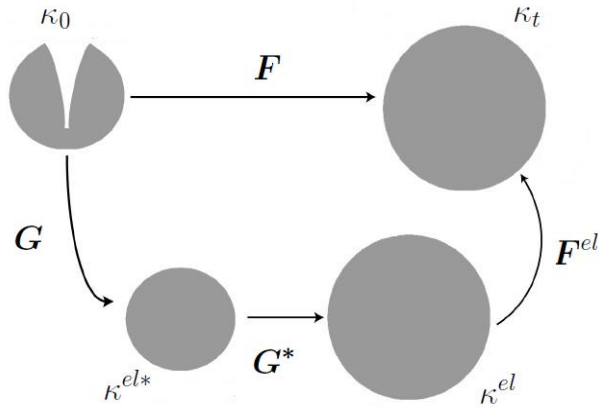


Figura 3.3. Descomposición del gradiente de deformación \mathbf{F} en las contribuciones de crecimiento másico (\mathbf{G}), crecimiento celular (\mathbf{G}^*) y de tensión (\mathbf{F}^{el}).

De este modo el tensor de deformación \mathbf{F} se escribe de la siguiente forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{el} \mathbf{G}^* \mathbf{G} \quad (3.3)$$

En las relaciones (3.1) y (3.2) radica la esencia de la teoría de las múltiples configuraciones naturales, puesto que en ellas se refleja la separación del movimiento en tres contribuciones independientes. El tensor \mathbf{G} está relacionado con el crecimiento del tumor de la forma en que la masa del mismo se incrementa como resultado del aumento de

la masa de cada célula individual. El tensor \mathbf{G}^* representa la contribución en donde el crecimiento está referido al incremento del número de células del tumor. Por tal motivo el tensor \mathbf{F}^{el} está relacionado con las tensiones a que está sometido el material y representa la contribución en donde es preservada la masa del cuerpo. En otras palabras, la masa se incrementa de la configuración κ_0 a la configuración natural κ^{el} y es preservada de la configuración κ^{el} a la configuración κ_t . Por estar asociados al crecimiento del tumor, a los tensores \mathbf{G} y \mathbf{G}^* se le denominan tensores de crecimiento. Como el gradiente de deformación \mathbf{F} es inversible se infiere que los tensores \mathbf{G} , \mathbf{F}^{el} y \mathbf{G}^* también lo serán. La transición de la configuración κ_0 a la κ^{el*} representa un comportamiento “netamente elástico”, es decir que puede verse como un verdadero estiramiento, no así la transición de κ^{el*} a κ^{el} , pero dado que estamos considerando que el cuerpo por lo general conserva su forma y que constituye un medio lo suficientemente denso se puede homologar esta transición con cierto comportamiento elástico “ficticio”.

La idea de separar el crecimiento del tumor en dos contribuciones independientes se sustenta sobre la base de lo planteado en la sección 3.1.1 con respecto al ciclo celular, ya que el mismo consta de procesos biológicos independientes que conducen al crecimiento y duplicación de las células.

En la sección 2.6 se explicó por que la configuración natural κ^{el} no puede ser compatible con ningún estado físico. Por las mismas razones la configuración κ^{el*} tampoco podrá serlo.

Ahora si $\rho(\mathbf{x}_0) = \rho(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), 0)$ representa el campo de densidad del cuerpo en el instante $t = 0$, entonces el elemento infinitesimal de masa en la configuración de referencia será

$$dm_0 = \rho_0(\mathbf{x}_0) dV_0. \quad (3.4)$$

Análogamente, para la configuración actual κ_t tendremos

$$dm = \rho(\mathbf{x}, t) dV. \quad (3.5)$$

Denotemos por dV^{el*} al elemento infinitesimal de volumen ocupado en la configuración natural κ^{el*} y por $\rho^{el*}(\mathbf{x}_0, t)$ al campo de densidad en dicha configuración. La relación entre el campo escalar de la densidad de la configuración κ^{el*} y la de κ_0 será (ver sección 2.6)

$$\rho^{el*}(\mathbf{x}_0, t) \equiv \rho^{el*}(\mathbf{x}_0) = \rho_0(\mathbf{x}_0). \quad (3.6)$$

El crecimiento de la masa entre las configuraciones κ_0 y κ^{el} es no homogéneo, por tal motivo las cantidades $dm(\kappa^{el})$ y $dm(\kappa^{el*})$ dependerán al menos, de la coordenada material \mathbf{x}_0 , con la posibilidad de incluir la dependencia con el tiempo t . Esto permite plantear que para el cociente entre los elementos de masa $dm(\kappa^{el})$ y $dm(\kappa^{el*})$ existe una función escalar positiva f que depende de \mathbf{x}_0 y del tiempo t que satisface la siguiente relación

$$\frac{dm(\kappa^{el})}{dm(\kappa^{el*})} = f(\mathbf{x}_0, t). \quad (3.7)$$

O sea que la proporción entre la masa debida al incremento del número de células $dm(\kappa^{el})$ y la masa debida al aumento del tamaño de las mismas $dm(\kappa^{el*})$ varía en el tiempo y en el espacio. Una forma equivalente de (3.7) es la siguiente

$$dm(\kappa^{el}) = f(\mathbf{x}_0, t) dm(\kappa^{el*}). \quad (3.8)$$

En la relación (3.7) también se contempla el caso en el cual la función f es constante con relación a la coordenada \mathbf{x}_0 y al tiempo t . Esta situación corresponde al caso límite del presente modelo y se discutirá en la subsección 3.9.1. Por estar relacionada con el crecimiento en células a la función f se le denotará como **función de crecimiento celular**.

Definición 3.1. Se entiende por **crecimiento celular** del tumor al incremento del número de sus células.

Atendiendo a (3.6) el elemento de masa en la configuración natural κ^{el*} será

$$dm^{el*} = \rho_0(\mathbf{x}_0) dV^{el*}. \quad (3.9)$$

Entonces considerando (3.8) tendremos

$$dm^{el} = \rho^{el} (\chi(\mathbf{x}_0, t), t) dV^{el} = f(\mathbf{x}_0, t) \rho_0(\mathbf{x}_0) dV^{el*}. \quad (3.10)$$

Si consideramos la relación (2.35) ($dV^{el} = J_{G^*} dV^{el*}$), de (3.10) se deduce inmediatamente que

$$\rho^{el} (\chi(\mathbf{x}_0, t), t) = \frac{f(\mathbf{x}_0, t) \rho_0(\mathbf{x}_0)}{J_{G^*}}, \quad (3.11)$$

y como la masa se preserva de la configuración κ^{el} a la κ_t

$$dm = \rho^{el} (\chi(\mathbf{x}_0, t), t) dV^{el} = \rho(\mathbf{x}, t) dV. \quad (3.12)$$

Ahora considerando nuevamente la relación (2.35) para dV en relación con dV^{el} ($dV = J^{el} dV^{el}$) tendremos que

$$\rho = \frac{\rho^{el}}{J^{el} J_{G^*}} = \frac{f \rho_0}{J^{el*}}, \quad (3.13)$$

donde se ha definido a J^{el*} como

$$J^{el*} = J^{el} J_{G^*}, \quad (3.14)$$

siendo

$$J_{G^*} = \det \mathbf{G}^* \quad (3.15)$$

y

$$J^{el} = \det \mathbf{F}^{el}. \quad (3.16)$$

Obsérvese que

$$J_G = \frac{dV^{el*}}{dV_0} = \frac{dm^{el*}}{dm_0} \quad (3.17)$$

y

$$J_{GG^*} = J_G J_{G^*} = \frac{dV^{el}}{dV_0} = J_{G^*} \frac{dm^{el*}}{dm_0}, \quad (3.18)$$

donde

$$J_{GG^*} = \det (\mathbf{G} \mathbf{G}^*). \quad (3.19)$$

Obsérvese que ahora es el conocimiento de los tensores \mathbf{G} y \mathbf{G}^* lo que determina si el tumor crece o decrece (ver sección 2.6).

En lo que sigue será útil la siguiente definición

Definición 3.2. Se entiende como **crecimiento íntegro** del tumor al crecimiento de la masa y del número de sus células, mientras que por **crecimiento másico** se entiende como el crecimiento exclusivo de la masa de células.

Como el tensor $\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{G} \mathbf{G}^*$ es invertible, le es aplicable el teorema de descomposición polar (1.2)

$$\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{G}}} \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{G}}}. \quad (3.20)$$

Como la configuración natural se puede escoger arbitrariamente se puede exigir que $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{G}}} = \mathbf{I}$ y por tanto $\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{G}}}$. De este modo el tensor $\bar{\mathbf{G}}$ es simétrico y definido positivo. Por estar relacionado con el crecimiento másico y con el incremento del número de células al tensor $\bar{\mathbf{G}}$ se le denomina **tensor de crecimiento íntegro**.

Bajo la suposición de que el crecimiento másico e íntegro es isotrópico se puede pasar a definir los tensores \mathbf{G} y $\bar{\mathbf{G}}$ como

$$\mathbf{G} = g \mathbf{I}, \quad \bar{\mathbf{G}} = \bar{g} \mathbf{I}. \quad (3.21)$$

donde g representa la función de **crecimiento másico** y a \bar{g} se le denomina **función de crecimiento íntegro**.

3.4. Relaciones geométricas

Como el movimiento se ha presupuesto isotrópico, es conveniente y necesario el uso de las coordenadas esféricas, en el tratamiento matemático de la modelación del crecimiento del tumor,

$$x = r \cos \theta \cos \phi, \quad y = r \cos \theta \sin \phi, \quad z = r \sin \theta, \quad (3.22)$$

donde $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $-\pi < \phi < \pi$ y $r > 0$.

Con esto en mente podemos pasar a escribir el vector de posición \mathbf{x} como

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = r (\cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 + \sin \theta \mathbf{e}_3), \quad (3.23)$$

donde $i = x, y, z$.

Los vectores tangentes a las curvas coordenadas en el sistema de coordenadas esféricas serán

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \sin \theta \mathbf{e}_z, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} = r (-\cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_y), \quad (3.25)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = r (-\sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x - \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z), \quad (3.26)$$

que para nuestra suerte constituye una base ortogonal, cuestión que a menudo simplifica numerosos cálculos.

Resultará mas cómodo en lo adelante, proceder con una base ortonormalizada. Un vector se dice ortonormalizado si cumple lo siguiente,

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}. \quad (3.27)$$

Para el vector \mathbf{e}_r tendremos

$$\|\mathbf{e}_r\| = \sqrt{\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \sin^2 \theta} = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1, \quad (3.28)$$

por tanto el vector normal asociado a \mathbf{e}_r será

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{e}_r, \quad (3.29)$$

De igual modo para \mathbf{e}_ϕ se obtiene que

$$\|\mathbf{e}_\phi\| = r \cos \theta, \quad (3.30)$$

entonces,

$$\hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{\mathbf{e}_\phi}{\|\mathbf{e}_\phi\|} = \frac{1}{r \cos \theta} \mathbf{e}_\phi, \quad (3.31)$$

y para \mathbf{e}_θ ,

$$\|\mathbf{e}_\theta\| = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta} = r \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = r, \quad (3.32)$$

o sea que

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\mathbf{e}_\theta}{\|\mathbf{e}_\theta\|} = \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}. \quad (3.33)$$

En conclusión la base ortonormalizada será

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{e}_r = \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \sin \theta \mathbf{e}_z, \quad (3.34)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{r \cos \theta} \mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y, \quad (3.35)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} = -\sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x - \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z. \quad (3.36)$$

De gran utilidad constituye el conocimiento de las derivadas de los vectores base (3.34)-(3.36), con respecto a las variables r , θ , ϕ .

$$\hat{\mathbf{e}}_{r,r} = \mathbf{0}, \quad (3.37)$$

$$\hat{e}_{r,\phi} = -\cos\theta \sin\phi \mathbf{e}_x + \cos\theta \cos\phi \mathbf{e}_y = \cos\theta \mathbf{e}_\phi, \quad (3.38)$$

$$\hat{e}_{r,\theta} = -\sin\theta \cos\phi \mathbf{e}_x - \sin\theta \sin\phi \mathbf{e}_y + \cos\theta \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\theta, \quad (3.39)$$

$$\mathbf{e}_{\phi,r} = \mathbf{0}, \quad (3.40)$$

$$\hat{e}_{\phi,\phi} = -\cos\phi \mathbf{e}_x - \sin\phi \mathbf{e}_y = -\cos\theta \mathbf{e}_r + \sin\theta \mathbf{e}_\theta, \quad (3.41)$$

$$\hat{e}_{\phi,\theta} = \mathbf{0}, \quad (3.42)$$

$$\hat{e}_{\theta,r} = \mathbf{0}, \quad (3.43)$$

$$\hat{e}_{\theta,\phi} = \sin\theta \sin\phi \mathbf{e}_x - \sin\theta \cos\phi \mathbf{e}_y = -\sin\theta \mathbf{e}_\phi, \quad (3.44)$$

$$\hat{e}_{\theta,\theta} = -\cos\theta \cos\phi \mathbf{e}_x - \cos\theta \sin\phi \mathbf{e}_y - \sin\theta \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_r. \quad (3.45)$$

Como se estipuló en la sección (3.2) el cuerpo en su conjunto no rota, como tampoco lo hacen sus partículas, es decir que todo el movimiento se concentra en la dirección radial,

$$r = r(r_0, t), \quad \theta = \theta_0, \quad \phi = \phi_0, \quad (3.46)$$

donde

$$r(r_0, 0) = r_0. \quad (3.47)$$

Por otro lado, si R representa el radio inicial del tumor, entendiendo al mismo como el máximo valor que alcanza la coordenada radial r_0 en el momento de tiempo $t = 0$, tendremos, atendiendo a (3.47) que

$$r(R, 0) = R. \quad (3.48)$$

Es necesario hacer la salvedad en resaltar que las variables que presentan el subíndice “0” representan coordenadas materiales. Dicho esto podemos decir que una partícula que inicialmente ocupe la posición (r_0, θ_0, ϕ_0) en la configuración de referencia ocupará la posición (r, θ_0, ϕ_0) en la configuración actual.

3.4.1. Operadores nabla y Laplaciano en coordenadas esféricas

Proposición 3.1. *El operador nabla en coordenadas esféricas se escribe, en la descripción Lagrangiana como*

$$\nabla_{\mathbf{x}_0}(\bullet) = \frac{1}{r'} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r_0} \mathbf{e}_{r_0} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \theta_0} \mathbf{e}_{\theta_0} + \frac{1}{r_0 \cos \theta_0} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \phi_0} \mathbf{e}_{\phi_0}. \quad (3.49)$$

El operador nabla en coordenadas esféricas en función de las coordenadas r, θ, ϕ se escribe de la siguiente forma

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi, \quad (3.50)$$

donde

$$\frac{\partial(\bullet)}{\partial r} = \frac{1}{r'} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r_0}. \quad (3.51)$$

En la mayoría de las situaciones que tendremos en lo adelante, solo se tomará en cuenta la parte radial de (3.50), es decir

$$\nabla_{\mathbf{x}_0}(\bullet) = \frac{1}{r'} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r_0} \mathbf{e}_{r_0}. \quad (3.52)$$

Proposición 3.2. *La parte radial del operador de Laplace en coordenadas esféricas, en la descripción Lagrangiana, se escribe como*

$$\Delta \mathbf{x}_0 = \frac{1}{(r')^2} \frac{\partial^2}{\partial r_0^2} - \frac{r''}{(r')^3} \frac{\partial}{\partial r_0} + \frac{2}{rr'} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r_0}. \quad (3.53)$$

Las demostraciones de las proposiciones 3.1 y 3.2 aparecen en la sección A.1 del Apéndice A.

3.5. Ecuaciones de balance

El objetivo de la presente sección es escribir las ecuaciones de balance, de las que se desprenden: el crecimiento de la variable radial del tumor en el tiempo (ecuación de balance del momento lineal) y el crecimiento de la masa del mismo (ecuación de balance de masa) también en el tiempo, así como de las tensiones que acompañan a dicho crecimiento, todo esto en el contexto de la teoría de mezclas.

3.5.0.1. Balance de masa

Proposición 3.3. *La razón de cambio de la densidad masa Γ puede determinarse si se conocen el tensor de crecimiento \mathbf{G} y la **función de crecimiento celular** f , de la siguiente manera,*

$$\Gamma = \frac{\dot{f}}{f} + \text{tr} \left(\dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} \right). \quad (3.54)$$

Demostración. La ecuación de balance de masa (2.116) para el componente correspondiente a las células del tumor se escribe como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = \Gamma \rho. \quad (3.55)$$

El campo escalar de la densidad ρ queda completamente determinado si se establecen las condiciones iniciales apropiadas para la ecuación (3.55) y se conoce Γ , justamente lo que se pretende determinar.

En la sección (3.3) se determinó que

$$J^{el*} \rho = f \rho_0. \quad (3.56)$$

Para mayor comodidad se suprime el asterisco en la relación (3.56), en consecuencia

$$J^{el} \rho = f \rho_0, \quad (3.57)$$

tomando en cuenta que

$$J = J^{el} J_{\mathbf{G}}, \quad (3.58)$$

(3.57) se convierte en

$$J \rho = \rho_0 J_{\mathbf{G}} f. \quad (3.59)$$

Pasando a la derivada material de (3.59) se tendrá

$$\frac{D}{Dt} (\rho J) = \rho_0 \frac{D}{Dt} (J_{\mathbf{G}} f) = \rho_0 \left(J_{\mathbf{G}} \dot{f} + f \dot{J}_{\mathbf{G}} \right). \quad (3.60)$$

Desglosando la ecuación (2.116) se obtiene que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho = \Gamma \rho. \quad (3.61)$$

Considerando (2.107), (3.61) se transforma en

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho = \Gamma \rho - \rho \text{tr} \mathbf{L}. \quad (3.62)$$

Haciendo uso de las relaciones (1.73), (1.111) y (1.112) se ve claramente que

$$\text{tr} \mathbf{L} = \text{tr} \left(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \right) = \dot{\mathbf{F}} : \mathbf{F}^{-T} = \frac{\dot{J}}{J}. \quad (3.63)$$

Recuérdese que $J = \det \mathbf{F}$.

Tomando en cuenta (3.63) y que el miembro izquierdo de (3.62) representa la derivada material del campo escalar de la densidad ρ ,

$$J \frac{D \rho}{Dt} + \rho \dot{J} = \Gamma \rho J, \quad (3.64)$$

$$\frac{D}{Dt}(\rho J) = \Gamma \rho J. \quad (3.65)$$

Si se intercambia el miembro derecho de (3.60) por el de (3.65) tendremos

$$\rho_0 \left(J_{\mathbf{G}} \dot{f} + f \dot{J}_{\mathbf{G}} \right) = \Gamma \rho J. \quad (3.66)$$

Ahora considerando (3.58) y (3.57)

$$\rho_0 \left(J_{\mathbf{G}} \dot{f} + f \dot{J}_{\mathbf{G}} \right) = \Gamma f \rho_0 J_{\mathbf{G}}, \quad (3.67)$$

dividiendo por $f \rho_0 J_{\mathbf{G}}$ en (3.67) se obtiene

$$\Gamma = \frac{\dot{f}}{f} + \frac{\dot{J}_{\mathbf{G}}}{J_{\mathbf{G}}}, \quad (3.68)$$

o más bien

$$\Gamma = \frac{\dot{f}}{f} + \text{tr} \left(\dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} \right). \quad (3.69)$$

□

La expresión (3.69) representa la tasa de crecimiento íntegro del tumor, en donde el cociente $\frac{\dot{f}}{f}$ representa la tasa de crecimiento del número células a la cual se denotará como **tasa de crecimiento celular** y $\text{tr} \left(\dot{\mathbf{G}} \mathbf{G} \right)$ la tasa de crecimiento correspondiente al incremento de masa celular a la que se le denominará **tasa de crecimiento másico**. Obsérvese que en el caso en que la **función de crecimiento celular** f sea constante en (3.69) solo figura la tasa de crecimiento másico, o sea que

$$\Gamma = \text{tr} \left(\dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} \right), \quad \text{si } f = \text{const.} \quad (3.70)$$

Esto significa que con la condición de que f sea constante el modelo de crecimiento íntegro del tumor se reduce a un modelo de crecimiento másico (Ariel Ramírez 2012 [15], Ariel Ramírez 2014 [14]).

Proposición 3.4. *La función f obedece la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales*

$$\frac{\partial f}{\partial r_0} = \frac{1}{J^{el}} \frac{\partial J^{el}}{\partial r_0} + \frac{r'}{v} \left[\frac{f}{J^{el}} \frac{\partial J^{el}}{\partial t} + f \text{tr} \left(\dot{\mathbf{G}} \mathbf{G} \right) - \frac{f}{r'} \frac{\partial v}{\partial r_0} \right]. \quad (3.71)$$

Demostración. Consideremos la parte radial del operador nabla (3.50) (el cuerpo no rota y todo el movimiento se realiza en la dirección radial)

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\bullet) = \frac{1}{r'} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r_0} e_r. \quad (3.72)$$

Si se sustituye en la ecuación de balance de masa (3.55) (en la configuración actual) se obtiene lo siguiente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r_0} (\rho v) = \Gamma \rho. \quad (3.73)$$

Ahora sustituyendo (3.13) (suprimiendo el asterisco para mayor comodidad) en (3.73)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{f \rho_0}{J^{el}} \right) + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r_0} \left(\frac{f \rho_0}{J^{el}} v \right) = \Gamma \left(\frac{f \rho_0}{J^{el}} \right), \quad (3.74)$$

de donde se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{f}{J^{el}} \frac{\partial J^{el}}{\partial t} + \frac{J^{el}}{r'} \left\{ v \left[\frac{1}{J^{el}} \frac{\partial f}{\partial r_0} - \frac{1}{(J^{el})^2} \frac{\partial J^{el}}{\partial r_0} \right] + \frac{f}{J^{el}} \frac{\partial v}{\partial r_0} \right\} = \Gamma f. \quad (3.75)$$

Sustituyendo (3.54) en (3.75)

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{f}{J^{el}} \frac{\partial J^{el}}{\partial t} + \frac{J^{el}}{r'} \left\{ v \left[\frac{1}{J^{el}} \frac{\partial f}{\partial r_0} - \frac{1}{(J^{el})^2} \frac{\partial J^{el}}{\partial r_0} \right] + \frac{f}{J^{el}} \frac{\partial v}{\partial r_0} \right\} = \dot{f} + f \text{tr} \left(\dot{\mathbf{G}} \mathbf{G} \right), \quad (3.76)$$

pero como $f = f(r_0, t)$,

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (3.77)$$

Atendiendo a esto, obtenemos una ecuación diferencial de primer orden respecto a r_0 y lineal en relación a f ,

$$\frac{\partial f}{\partial r_0} = \frac{1}{J^{el}} \frac{\partial J^{el}}{\partial r_0} + \frac{r'}{v} \left[\frac{f}{J^{el}} \frac{\partial J^{el}}{\partial t} + f \text{tr} \left(\dot{\mathbf{G}} \mathbf{G} \right) - \frac{f}{r'} \frac{\partial v}{\partial r_0} \right]. \quad (3.78)$$

□

3.5.1. Balance del momento lineal

Como se expuso en la sección 2.41 del capítulo 2, en un material hiperelástico la energía de deformación ψ constituye una función diferenciable del gradiente de deformación. En la literatura existente se pueden encontrar diferentes variantes para la energía de deformación. En este trabajo se empleará la energía de deformación de Ciarlet (Bertram 2008 [2]),

$$\psi = \frac{\lambda}{4} (III_{\mathbf{B}} - \ln III_{\mathbf{B}} - 1) + \frac{\mu}{2} (I_{\mathbf{B}} - \ln III_{\mathbf{B}} - 3), \quad (3.79)$$

donde λ y μ son conocidas en la literatura como constantes de Lamé.

A partir de (3.79) puede obtenerse el tensor de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ a través de la relación (2.98)

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B}. \quad (3.80)$$

Para obtener (3.80) se hace imprescindible obtener la forma explícita del gradiente de deformación \mathbf{F} en forma de producto tensorial,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{x} \otimes \nabla_{\mathbf{x}_0} \\ &= r(r_0, t) \mathbf{e}_r \otimes \left(\frac{\partial}{\partial r_0} \mathbf{e}_{r_0} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \theta_0} \mathbf{e}_{\theta_0} + \frac{1}{r_0 \cos \theta_0} \frac{\partial}{\partial \phi_0} \mathbf{e}_{\phi_0} \right) \\ &= \frac{\partial(r(r_0, t) \mathbf{e}_r)}{\partial r_0} \otimes \mathbf{e}_{r_0} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial(r(r_0, t) \mathbf{e}_r)}{\partial \theta_0} \otimes \mathbf{e}_{\theta_0} + \frac{1}{r_0 \cos \theta} \frac{\partial(r(r_0, t) \mathbf{e}_r)}{\partial \phi_0} \otimes \mathbf{e}_{\phi_0}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

finalmente tendremos que

$$\mathbf{F} = r' \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_{r_0} + \frac{r}{r_0} \left(\mathbf{e}_{r, \theta_0} \otimes \mathbf{e}_{\theta_0} + \frac{1}{\cos \theta_0} \mathbf{e}_{r, \phi_0} \otimes \mathbf{e}_{\phi_0} \right). \quad (3.82)$$

Dado el carácter isotrópico del movimiento ($\theta = \theta_0$, $\phi = \phi_0$ y $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_{r_0}$) se pueden reemplazar las derivadas de \mathbf{e}_r en relación a θ y a ϕ , respectivamente deducidas en las relaciones (3.38) y (3.39). Por tanto \mathbf{F} se podrá escribir de la siguiente manera

$$\mathbf{F} = r' \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{r}{r_0} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi), \quad (3.83)$$

cuya respectiva forma matricial es

$$\mathbf{F}_{(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)} = \begin{bmatrix} r' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{r_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{r_0} \end{bmatrix}, \quad (3.84)$$

donde

$$i, j = r, \theta, \phi. \quad (3.85)$$

Atendiendo a (2.37) se tiene que

$$\mathbf{B} = (r')^2 \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{r^2}{r_0^2} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi). \quad (3.86)$$

Proposición 3.5. *El tensor de tensión de Cauchy en la configuración actual es*

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \left(\mu (\mathbf{B} - \mathbf{I}) + \frac{\lambda}{2} (III_{\mathbf{B}} - 1) \mathbf{I} \right). \quad (3.87)$$

Demostración. como $\psi = \psi(I_{\mathbf{B}}, III_{\mathbf{B}})$, aplicando la regla de la cadena tendremos

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\partial \psi}{\partial I_{\mathbf{B}}} \frac{\partial I_{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{B}} + \frac{\partial \psi}{\partial III_{\mathbf{B}}} \frac{\partial III_{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{B}}, \quad (3.88)$$

en donde

$$\frac{\partial I_{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{I} \quad (3.89)$$

y

$$\frac{\partial III_{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{B}} = III_{\mathbf{B}} \mathbf{B}^{-T}. \quad (3.90)$$

Entonces atendiendo a (3.79) y a (3.80)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{2}{J} \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_{\mathbf{B}}} \frac{\partial I_{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{B}} + \frac{\partial \psi}{\partial III_{\mathbf{B}}} \frac{\partial III_{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{B}} \right) \mathbf{B} \\ &= \frac{2}{J} \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_{\mathbf{B}}} \mathbf{I} + \frac{\partial \psi}{\partial III_{\mathbf{B}}} III_{\mathbf{B}} \mathbf{B}^{-T} \right) \mathbf{B} \\ &= \frac{2}{J} \left(\frac{\mu}{2} \mathbf{I} + \frac{\lambda}{4} (III_{\mathbf{B}} - 1) \mathbf{B}^{-T} - \frac{\mu}{2} \mathbf{B}^{-T} \right) \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

O sea,

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \left(\mu (\mathbf{B} - \mathbf{I}) + \frac{\lambda}{2} (III_{\mathbf{B}} - 1) \mathbf{I} \right). \quad (3.92)$$

□

La siguiente proposición nos dará la posibilidad de expresar al tensor $\boldsymbol{\sigma}$ en términos de la configuración natural.

Proposición 3.6. *El tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ satisface en la configuración actual, la siguiente relación*

$$\boldsymbol{\sigma}^{el} = \sigma_{rr}^{el} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta}^{el} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi), \quad (3.93)$$

con

$$\sigma_{rr}^{el} = \frac{1}{\sqrt{III_{\mathbf{B}}}} \left(\mu \left(\frac{(r')^2}{\bar{g}^2} - 1 \right) + \frac{\lambda}{2} (III_{\mathbf{B}} - 1) \right) \quad (3.94)$$

y

$$\sigma_{\theta\theta}^{el} = \sigma_{\phi\phi}^{el} = \frac{1}{\sqrt{III_{\mathbf{B}}}} \left(\mu \left(\frac{r^2}{\bar{g}^2 r_0^2} - 1 \right) + \frac{\lambda}{2} (III_{\mathbf{B}} - 1) \right). \quad (3.95)$$

Demostración. Primero que todo, téngase en cuenta que

$$\begin{aligned} J^{el} &= \det(\mathbf{F}^{el}) = III_{\mathbf{F}^{el}} = \sqrt{III_{\mathbf{B}^{el}}} \\ &= \sqrt{\det \mathbf{B}^{el}}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Si volvemos a la relación (3.1) y tomamos en cuenta (3.83) vemos que

$$\mathbf{F}^{el} = \mathbf{F} \bar{\mathbf{G}}^{-1} = \bar{g}^{-1} r' \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \bar{g}^{-1} \frac{r}{r_0} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi). \quad (3.97)$$

Entonces

$$\mathbf{B}^{el} = \mathbf{F}^{el} (\mathbf{F}^{el})^T \quad (3.98)$$

y en consecuencia

$$\mathbf{B}^{el} = \bar{g}^{-2} (r')^2 \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \bar{g}^{-2} \frac{r^2}{r_0^2} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi). \quad (3.99)$$

Por tanto

$$\boldsymbol{\sigma}^{el} = \frac{1}{J^{el}} \left(\mu (\mathbf{B}^{el} - \mathbf{I}) + \frac{\lambda}{2} ((J^{el})^2 - 1) \mathbf{I} \right), \quad (3.100)$$

donde

$$J^{el} = \frac{r' r^2}{\bar{g}^3 r_0^2}. \quad (3.101)$$

Sustituyendo (3.99) en (3.100)

$$\boldsymbol{\sigma}^{el} = \sigma_{rr}^{el} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta}^{el} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi), \quad (3.102)$$

donde

$$\sigma_{rr}^{el} = \frac{1}{\sqrt{III_{\mathbf{B}^{el}}}} \left(\mu \left(\frac{(r')^2}{\bar{g}^2} - 1 \right) + \frac{\lambda}{2} (III_{\mathbf{B}^{el}} - 1) \right), \quad (3.103)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{el} = \sigma_{\phi\phi}^{el} = \frac{1}{\sqrt{III_{\mathbf{B}^{el}}}} \left(\mu \left(\frac{r^2}{\bar{g}^2 r_0^2} - 1 \right) + \frac{\lambda}{2} (III_{\mathbf{B}^{el}} - 1) \right). \quad (3.104)$$

□

Para las células del tumor la ecuación de balance del momento lineal en forma local (diferencial) (2.117) se escribe como

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} + \rho \Gamma \mathbf{v}, \quad (3.105)$$

donde $\mathbf{q} = 0$ dado que se ha asumido que no hay interacciones (se han despreciado las interacciones mecánicas de las células con los nutrientes)

Proposición 3.7. *La ecuación de balance del momento lineal (3.105) es equivalente a la ecuación*

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}. \quad (3.106)$$

Demostración. Realizando procedimientos similares a los de la sección (2.5.2) del Capítulo 2 se llega a que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \mathbf{v} + \rho \Gamma \mathbf{v} \quad (3.107)$$

$$= \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \rho \Gamma \mathbf{v}$$

y finalmente sustituyendo el miembro derecho de la ecuación (3.105) en (3.107) se obtiene la ecuación de movimiento en forma local (diferencial) para un solo componente

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}, \quad (3.108)$$

cuya forma es idéntica a la de (2.120)

□

Definición 3.3. *En la configuración natural, la ecuación de movimiento (3.108) toma la forma*

$$\rho \frac{D\mathbf{v}^{el}}{Dt} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{el} + \mathbf{b}. \quad (3.109)$$

Proposición 3.8. *La ecuación de movimiento (3.109) puede escribirse de la siguiente manera*

$$\frac{(\sigma_{rr}^{el})'}{r'} + \frac{2}{r} (\sigma_{rr}^{el} - \sigma_{\theta\theta}^{el}) + b_r = 0, \quad b_\theta = b_\phi = 0. \quad (3.110)$$

Demostración. Empleando las relaciones (3.37)-(3.45) y la definición del producto tensorial (sección 1.0.2 del capítulo 1) se puede calcular el término $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{el}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}}{\partial r} \mathbf{e}_r = \sigma_{rr,r}^{el} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta}^{el} [(\mathbf{e}_{\theta,r} \otimes \mathbf{e}_\theta) \mathbf{e}_r + (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_{\theta,r}) \mathbf{e}_r + (\mathbf{e}_{\phi,r} \otimes \mathbf{e}_\phi) \mathbf{e}_r + (\mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_{\phi,r}) \mathbf{e}_r] \quad (3.111)$$

$$+ \sigma_{rr}^{el} [(\mathbf{e}_{r,r} \otimes \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r + (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_{r,r}) \mathbf{e}_r] + \sigma_{\theta\theta,r}^{el} [(\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta) \mathbf{e}_r + (\mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi) \mathbf{e}_r],$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \left\{ \sigma_{rr}^{el} [(\mathbf{e}_{r,\theta} \otimes \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_\theta + (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_{r,\theta}) \mathbf{e}_\theta] + \sigma_{\theta\theta}^{el} [(\mathbf{e}_{\theta,\theta} \otimes \mathbf{e}_\theta) \mathbf{e}_\theta + (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_{\theta,\theta}) \mathbf{e}_\theta] \right\}, \quad (3.112)$$

$$\frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi = \sigma_{rr}^{el} \frac{1}{r \cos \theta} [(\mathbf{e}_{r,\phi} \otimes \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_\phi + (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_{r,\phi}) \mathbf{e}_\phi] \quad (3.113)$$

$$+ \sigma_{\theta\theta}^{el} \frac{1}{r \cos \theta} [(\mathbf{e}_{\theta,\phi} \otimes \mathbf{e}_\theta) \mathbf{e}_\phi + (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_{\theta,\phi}) \mathbf{e}_\phi + (\mathbf{e}_{\phi,\phi} \otimes \mathbf{e}_\phi) \mathbf{e}_\phi + (\mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_{\phi,\phi}) \mathbf{e}_\phi],$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}}{\partial r} \mathbf{e}_r = \sigma_{rr,r}^{el} \mathbf{e}_r, \quad (3.114)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta = \left[-\frac{\sigma_{\theta\theta}^{el}}{r} + \frac{\sigma_{rr}^{el}}{r} \right] \mathbf{e}_r, \quad (3.115)$$

$$\frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{r} [\sigma_{rr}^{el} - \sigma_{\theta\theta}^{el}] \mathbf{e}_r \quad (3.116)$$

y como es sabido (véase (3.50))

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{el} &= \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{el}}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \\ &= \left[\sigma_{rr,r}^{el} + \frac{2}{r} (\sigma_{rr}^{el} - \sigma_{\theta\theta}^{el}) \right] \mathbf{e}_r. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Atendiendo a (3.52) podemos expresar a (3.117) en función de las coordenadas materiales, o sea

$$\nabla_{\mathbf{x}_0} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{el} = \left[\frac{(\sigma_{rr}^{el})'}{r'} + \frac{2}{r} (\sigma_{rr}^{el} - \sigma_{\theta\theta}^{el}) \right] \mathbf{e}_r. \quad (3.118)$$

La variación de la velocidad de crecimiento en los tejidos biológicos es lo suficiente pequeña como para poder despreciar el miembro izquierdo en (3.109). Entonces se tendrá que

$$\nabla_{\mathbf{x}_0} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{el} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (3.119)$$

es decir,

$$\frac{(\sigma_{rr}^{el})'}{r'} + \frac{2}{r} (\sigma_{rr}^{el} - \sigma_{\theta\theta}^{el}) + b_r = 0 \quad (3.120)$$

y como el movimiento es isotrópico, solo la componente radial del vector \mathbf{b} será distinta de cero (si las componentes axial y azimutal de \mathbf{b} son distintas de cero no se podrá asegurar que el movimiento es isotrópico), o sea que

$$b_\theta = b_\phi = 0. \quad (3.121)$$

□

3.6. Acoplamiento entre crecimiento y tensión

El objetivo principal de esta sección es encontrar una relación matemática que vincule el crecimiento y la tensión, ambos asociados al tumor.

La tasa neta de crecimiento del tumor está dada por la relación (3.54), la cual puede ser escrita como

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1, \quad (3.122)$$

donde $\Gamma_0 = \text{tr}(\dot{\mathbf{G}}\mathbf{G})$ (tasa de crecimiento másico) $\Gamma_1 = \frac{\dot{f}}{f}$ (tasa de crecimiento celular). Estableciendo un vínculo entre el escalar Γ y el gradiente de deformación \mathbf{F} se logra vincular el crecimiento y la tensión. Como se verá en lo que sigue, puede establecerse una relación entre la tasa Γ_0 y el tensor \mathbf{F} considerando el caso en donde solo hay crecimiento másico, con lo cual (3.122) no pierde validez pues los aportes al crecimiento dado por Γ_0 y por Γ_1 son independientes. Teniendo esto en mente la expresión (3.2) tomará la siguiente forma

$$\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G}^* \mathbf{G} = \mathbf{G}, \quad (3.123)$$

en donde

$$\mathbf{G}^* = \mathbf{I}, \quad (3.124)$$

debido a que ha sido descartado el crecimiento celular. En consecuencia (3.1) podrá escribirse como

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{el} \mathbf{G}. \quad (3.125)$$

También debe cumplirse la ley de balance de masa de manera local

$$\overbrace{(\dot{J}^{el} \rho)} = 0, \quad (3.126)$$

puesto que $\dot{f} = 0$ (ver relación (3.57)).

En lo que resta de sección todos los procedimientos matemáticos estarán referidos a un tumor que solo experimenta crecimiento másico.

Considerando que el cuerpo hiperelástico atribuido al tumor se halla en equilibrio térmico, en todo momento de tiempo t , se asume que la energía es suministrada al sistema conformado por dicho cuerpo en dos maneras: trabajo de las fuerzas externas que se encuentran en equilibrio con las internas y energía proporcionada específicamente para el crecimiento. La energía entregada al sistema por esas vías será almacenada al menos como energía mecánica. Esto se resume en el siguiente principio de disipación (Ambrossi y Guana 2007 [7])

$$(J\rho\dot{\psi}) \leq J\sigma : \mathbf{L} + J\xi, \quad (3.127)$$

donde ψ es la energía libre por unidad de volumen del cuerpo (que coincide con la energía libre en la configuración κ_0) y ξ representa la energía por unidad de tiempo suministrada externamente para el crecimiento.

Aquí se adopta el procedimiento propuesto por Di Carlo y Quiligotti 2002 [8] en donde la desigualdad (3.127) puede aprovecharse exitosamente presuponiendo que la energía necesaria para el crecimiento es externamente suministrada como el trabajo de alguna clase de fuerzas que gobiernan el proceso de crecimiento, denominadas **fuerzas acrecentoras** (Ambrossi y Guana 2007 [7])

$$\xi = \rho \mathbf{M} : \dot{\mathbf{G}}\mathbf{G}^{-1}, \quad (3.128)$$

donde \mathbf{M} es el tensor referido a las fuerzas acrecentoras internas que se encuentran en equilibrio con las fuerzas externas, a estas últimas les corresponde el tensor \mathbf{N} la cual se encuentra sujeta a la siguiente restricción (similar a la que obedecen las fuerzas involucradas)

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}. \quad (3.129)$$

El factor $\dot{\mathbf{G}}\mathbf{G}^{-1}$ se interpreta como la velocidad de las fuerzas acrecentoras.

Aunque la introducción de las fuerzas acrecentoras constituye una herramienta efectiva y de gran utilidad para la modelación del crecimiento del tumor, se desconoce la naturaleza de las mismas debido a que no son del todo entendidos los mecanismos que contribuyen a su crecimiento. No obstante la ecuación (3.129) puede entenderse como una idealización de todos los estímulos biomecánicos que inducen el crecimiento tumoral sujetos al formalismo de balance de fuerzas.

La demostración de la siguiente proposición puede encontrarse en Ariel Ramírez 2014 [14].

Proposición 3.9. *Una forma equivalente para el principio de disipación de energía (3.127) es el siguiente*

$$\left(J^{el} \sigma \left(\mathbf{F}^{el} \right)^{-T} - \psi_{,\mathbf{F}^{el}} \right) : \dot{\mathbf{F}}^{el} + \left(\left(\mathbf{F}^{el} \right)^T J^{el} \sigma \left(\mathbf{F}^{el} \right)^{-T} + \mathbf{M} - \psi \mathbf{I} \right) : \dot{\mathbf{G}}\mathbf{G}^{-1} \geq 0. \quad (3.130)$$

De cumplirse que

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^+ - \left(\mathbf{F}^{el} \right)^T J^{el} \sigma \left(\mathbf{F}^{el} \right)^{-T} + \psi \mathbf{I}, \quad J^{el} \sigma \left(\mathbf{F}^{el} \right)^{-T} = \psi_{,\mathbf{F}^{el}}, \quad (3.131)$$

la desigualdad (3.127) se mantiene válida para valores arbitrarios de $\dot{\mathbf{F}}^{el}$ y $\dot{\mathbf{G}}\mathbf{G}$ si \mathbf{M}^+ se encuentra sujeto a la siguiente restricción

$$\mathbf{M}^+ : \dot{\mathbf{G}}\mathbf{G} \geq 0. \quad (3.132)$$

Si se asume que

$$\mathbf{M}^+ = \dot{\mathbf{G}}\mathbf{G}, \quad (3.133)$$

la ecuación (3.131) se transforma en

$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{G}}\mathbf{G} - \left(\mathbf{F}^{el} \right)^T J^{el} \sigma \left(\mathbf{F}^{el} \right)^{-T} + \psi \mathbf{I}. \quad (3.134)$$

Teniendo en cuenta (3.131) se obtiene lo siguiente

$$\dot{\mathbf{G}}\mathbf{G} = - \left(\psi \mathbf{I} - \left(\mathbf{F}^{el} \right)^T \psi_{,\mathbf{F}^{el}} \right) + \mathbf{M}. \quad (3.135)$$

El primer término del miembro derecho de la ecuación (3.135) es un tensor tipo Eshelby (Holzapfel 2000 [17])

$$\mathbf{E} = \psi \mathbf{I} - \left(\mathbf{F}^{el} \right)^T \psi_{,\mathbf{F}^{el}}. \quad (3.136)$$

Como $\Gamma_0 = tr \left(\dot{\mathbf{G}}\mathbf{G} \right)$, atendiendo a (3.135) se tendrá que

$$\Gamma_0 = tr \left(\mathbf{E} - \mathbf{M} \right). \quad (3.137)$$

La función escalar (3.137) permite establecer un nexo entre la tensión y el crecimiento para un tumor que crece solo experimentalmente másico. Con esto en mente y tomando en cuenta (3.54), el acoplamiento entre el **crecimiento íntegro** y la tensión para nuestro tumor se establece a partir de la siguiente relación

$$\Gamma = \frac{\dot{f}}{f} + tr \left(\mathbf{E} - \mathbf{M} \right). \quad (3.138)$$

3.7. Evolución de la concentración de nutrientes

Se asume que los nutrientes se difunden hacia el interior del tumor obedeciendo la segunda ley de Fick

$$\dot{n} = \delta \Delta n - \dot{n}_{cd}, \quad (3.139)$$

donde n representa la concentración de nutrientes, δ el coeficiente de difusión y \dot{n}_{cd} es el cambio de la concentración de nutrientes como consecuencia del consumo de nutrientes por parte de las células que forman parte del tumor. Si N representa la cantidad de nutrientes en un volumen pequeño V , entonces $n = \frac{N}{V}$ será la concentración de nutrientes en dicho volumen. La situación en la cual la concentración de nutrientes se hace estacionaria es compatible con aquella en la cual no hay difusión (existe una cantidad fija de nutrientes). El cambio de la concentración de nutrientes en este caso será

$$\dot{n}_{cd} = \frac{\dot{N}}{V} - \frac{N}{V^2} \dot{V}. \quad (3.140)$$

En la medida en que el tumor incrementa su volumen es lógico que decrezca la disponibilidad de nutrientes debido a que la ley de difusión no cambia con el crecimiento del tumor. Por ello se puede introducir la suposición constitutiva hecha en Ariel Ramírez 2014 [14] de que el consumo de N es $-\zeta$ proporcional al incremento de volumen, o sea que

$$\dot{N} = -\zeta \dot{V}. \quad (3.141)$$

Sustituyendo (3.140) en (3.141) se tendrá como resultado lo siguiente

$$\dot{n}_{cd} = -(\zeta + n) \frac{\dot{V}}{V}. \quad (3.142)$$

Por otro lado el incremento de volumen está determinado por la relación $J_{\bar{\mathbf{G}}} = \frac{V}{V_0}$. Por ello

$$\dot{V} = V_0 \frac{\partial J_{\bar{\mathbf{G}}}}{\partial t} = V_0 \frac{\partial J_{\bar{\mathbf{G}}}}{\partial \bar{\mathbf{G}}} : \dot{\bar{\mathbf{G}}} = V_0 \frac{V}{V_0} \bar{\mathbf{G}}^{-T} : \dot{\bar{\mathbf{G}}} = 3V \frac{\dot{\bar{g}}}{\bar{g}}, \quad (3.143)$$

en conclusión,

$$\frac{\dot{V}}{V} = 3 \frac{\dot{\bar{g}}}{\bar{g}} \quad (3.144)$$

y en consecuencia

$$\dot{n}_{cd} = -3(\zeta + n) \frac{\dot{\bar{g}}}{\bar{g}}. \quad (3.145)$$

Entonces la segunda ley de Fick se escribirá como

$$\dot{n} = \delta \left(\frac{n''}{(r')^2} - \frac{n' r''}{(r')^3} + \frac{2n'}{r r'} \right) - 3(\zeta + n) \frac{\dot{\bar{g}}}{\bar{g}}. \quad (3.146)$$

Obsérvese que la ecuación (3.146) constituye una ecuación parabólica en derivadas parciales. Para la resolución de la misma se toma por condición de frontera que la concentración de nutrientes es constante en la frontera del tumor.

3.8. Ley de crecimiento

Como se planteó en la sección 3.3 la elección de la forma del tensor de crecimiento $\bar{\mathbf{G}}$ se realiza de manera arbitraria, o sea que el tensor de crecimiento constituye una herramienta auxiliar para facilitar la modelación del crecimiento del tumor. La elección de la forma del tensor de crecimiento (tanto matricial como funcional) debe estar acorde con las características de nuestro modelo; como ya se conoce en la sección 3.3 se precisó la forma diagonal para $\bar{\mathbf{G}}$ debido al crecimiento isotrópico del tumor.

La elección de la forma funcional de $\bar{\mathbf{G}}$ es motivo de diferentes investigaciones. Por ejemplo en Ariel Ramírez [14], para vincular el crecimiento con las respuestas mecánicas y con la concentración de los nutrientes, la ecuación que representa la evolución del tensor de crecimiento se asumió de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathcal{G}(r_0, n, \mathbf{G}, \boldsymbol{\sigma}, t), \quad (3.147)$$

donde \dot{g} obedece la siguiente relación

$$\dot{g} = (n - n_0) \Gamma_0 g \quad (3.148)$$

y

$$\Gamma_0 = \text{tr} \left(\dot{\mathbf{G}} \mathbf{G} \right). \quad (3.149)$$

En el modelo de este trabajo, el crecimiento además de estar vinculado con las respuestas mecánicas y con la concentración de nutrientes, debe estarlo con la variación del número de células, o sea que la ecuación que rige la evolución del tensor de crecimiento $\bar{\mathbf{G}}$ debe incluir la dependencia con la función de crecimiento celular f

$$\dot{\bar{\mathbf{G}}} = \bar{\mathcal{G}}(r_0, n, \bar{\mathbf{G}}, f, \boldsymbol{\sigma}, t).$$

Atendiendo a esto se propone una dependencia para $\dot{\bar{g}}$ similar a 3.148

$$\dot{\bar{g}} = (n - n_0) f \Gamma_0 \bar{g}. \quad (3.150)$$

3.9. Planteamiento matemático del problema

Las ecuaciones que determinan el crecimiento del tumor para nuestro modelo son las siguientes:

$$\frac{(\sigma_{rr}^{el})'}{r'} + \frac{2}{r} (\sigma_{rr}^{el} - \sigma_{\theta\theta}^{el}) + b_r = 0, \quad (3.151)$$

$$\dot{n} = \delta \left(\frac{n''}{(r')^2} - \frac{n' r''}{(r')^3} + \frac{2n'}{r r'} \right) - 3(\tau + n) \frac{\dot{\bar{g}}}{\bar{g}}, \quad (3.152)$$

$$\dot{\bar{g}} = (n - n_0) f \Gamma_0 \bar{g}, \quad (3.153)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r_0} = \frac{1}{J^{el}} \frac{\partial J^{el}}{\partial r_0} + \frac{r'}{v} \left[\frac{f}{J^{el}} \frac{\partial J^{el}}{\partial t} + f \text{tr} \left(\dot{\mathbf{G}} \mathbf{G} \right) - \frac{f}{r'} \frac{\partial v}{\partial r_0} \right]. \quad (3.154)$$

En el sistema (3.151)-(3.154) las funciones incógnitas a determinar, la fuerza \mathbf{b} , el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ y los parámetros δ y τ aparecen adimensionalizados

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mu^* \boldsymbol{\sigma}, \quad \hat{r}_0 = L r_0, \quad t = T \hat{t}, \quad \hat{\mathbf{b}} = \frac{L}{T^2} \mathbf{b}, \quad \hat{n} = \frac{\bar{N}}{L^3} n, \quad \hat{\delta} = \frac{L^2}{T} \delta, \quad \tau = \frac{L^3 \zeta}{\bar{N}}, \quad \hat{\rho} = \frac{\mu^* T^2}{L^2} \rho. \quad (3.155)$$

Donde se ha hecho $\rho_0 \mu^* = \mu$ y $\lambda^* = \rho_0 \lambda^*$. Todos los términos (3.155) aparecen en el sistema (3.151)-(3.154) sin sombrero.

3.9.0.1. Condiciones de frontera

Las incógnitas del sistema de ecuaciones diferenciales anterior son r , n , \bar{g} y f , las cuales se encuentran sujetas a las siguientes consideraciones: 1) $r(R, t)$ y $r'(R, t)$ se escogen de manera tal que en la frontera de superficie la tensión radial sea cero, o sea, $\sigma_{rr}^{el} = 0$, 2) para darle solución a la ecuación de n esta se asume constante en la superficie y como condición inicial se toma $n(r_0, 0) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r_0}{3} \right)^2 + 1 \right]$, 3) el tensor de crecimiento inicialmente se iguala al tensor identidad $\bar{\mathbf{G}}(r_0, 0) = \mathbf{G}(r_0, 0) = \mathbf{I}$ y 4) la función f se asume inicialmente igual a la unidad $f(r_0, 0) = 1$.

En el modelo planteado en Ariel Ramírez 2014 [14] la evolución del tumor estuvo descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales conformado por las expresiones (3.151)-(3.152) y (3.148) donde las funciones a determinar fueron r , n , g (la función g apareció en lugar de \bar{g}). El sistema de ecuaciones (3.151)-(3.154) y por ende el modelo que representa, es más general que el de Ariel Ramírez 2014 [14], por el hecho de introducir una nueva incógnita, la función de crecimiento celular f .

3.9.1. Caso límite

El caso límite de este modelo es aquel en el cual el crecimiento en tamaño del tumor es exclusivamente debido a su crecimiento másico. Esto se logra eligiendo a la función f de la siguiente manera

$$f = \begin{cases} 1 & \text{si } t < \bar{t}, \text{ si } r_0 < \bar{r} \\ f^* & \text{si } t > \bar{t}, \text{ si } r_0 > \bar{r} \end{cases}. \quad (3.156)$$

Los símbolos \bar{r} y \bar{t} representan valores constantes pendientes a ser precisados.

. Para $t < \bar{t}$ y $r_0 < \bar{r}$ $f = 1$ y el sistema (3.151)-(3.154) se reduce al siguiente

$$\frac{(\sigma_{rr}^{el})'}{r'} + \frac{2}{r} (\sigma_{rr}^{el} - \sigma_{\theta\theta}^{el}) + b_r = 0, \quad (3.157)$$

$$\dot{n} = \delta \left(\frac{n''}{(r')^2} - \frac{n' r''}{(r')^3} + \frac{2n'}{r r'} \right) - 3(\tau + n) \frac{\dot{g}}{g}, \quad (3.158)$$

$$\dot{g} = (n - n_0) \Gamma g, \quad (3.159)$$

en donde

$$\Gamma = \Gamma_0. \quad (3.160)$$

De este modo el modelo de este trabajo contiene al de Ariel Ramírez (2014) [14] como caso particular.

3.10. Presentación de análisis y resultados

El objetivo de esta sección es mostrar y discutir los resultados que se obtuvieron a partir de la modelación de un tumor sólido en fase avascular, bajo las hipótesis introducidas en la sección 3.2.

Para la solución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales (3.151)-(3.154) se asumió el tiempo discreto para reducir dicho sistema a uno de ecuaciones diferenciales ordinarias (en la literatura este método se conoce como método de líneas) cuya solución numérica se obtuvo al implementar en el programa Wolfram Mathematica 9 una combinación de los métodos de Runge Kutta de orden cuatro, de disparo y de Euler, fijando los siguientes parámetros, consultados en la literatura (Ariel Ramírez 2014 [14]) $\rho_0 = 0, 1$, $n_0 = \frac{n}{10^2}$, $\mu^* = 1$, $\lambda^* = 0, 6$, $\tau = 1$, $\delta = 5$, $\mathbf{M} = \mathbf{I}$. A partir de la soluciones del sistema (3.151)-(3.154) se obtuvieron los gráficos que se muestran a continuación, varios de ellos merecen ser comentados.

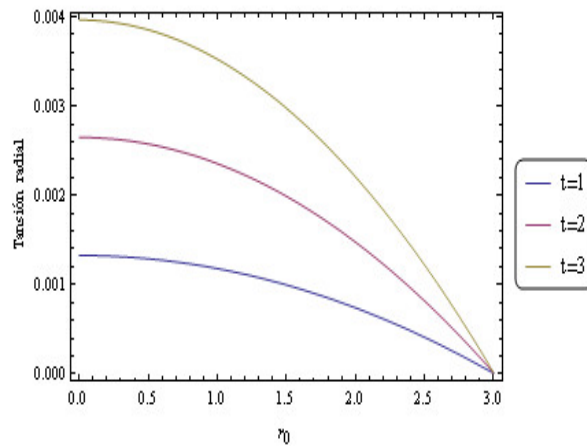


Figura 3.4. Tensión radial σ_{rr}^{el} en diferentes instantes de tiempo ($b = 0$).

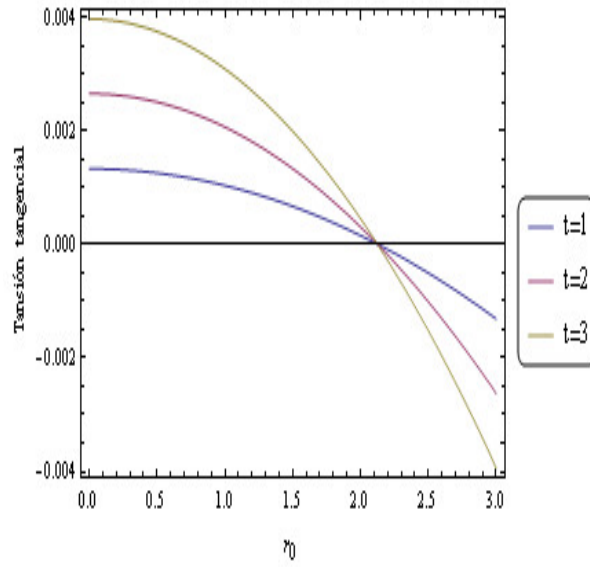


Figura 3.5. Tensión tangencial $\sigma_{\phi\phi}$ para diferentes momentos de tiempo ($b = 0$).

En los experimentos con tumores avasculares realizados por (Martin et.al 2013 [10]) se determinó que conjuntamente como estos evolucionan en el tiempo (en ausencia de fuerzas aplicadas) van surgiendo tensiones residuales producto de este crecimiento, las cuales serán relativamente altas en el interior e inferiores en la periferia de este tipo de tumores. Las figuras 3.4 y 3.5 revelan un patrón acorde con esta situación, ya que las tensiones radial σ_{rr} y tangencial $\sigma_{\phi\phi}$ aumentan con el tiempo t y decrecen con la coordenada material r_0 . Estas tensiones representan el estrés residual inducido por el crecimiento del tumor dado que sobre el mismo no se ejercen fuerzas externas ($b = 0$). En las figuras 3.6 (izquierda) y 3.7 (izquierda) se constata como las fuerzas aplicadas pueden incrementar las tensiones radial y tangencial y en las figuras 3.6 (derecha) y 3.7 (derecha) se verifica que el aumento de la función f (el aumento del número de células) incrementa las tensiones residuales.

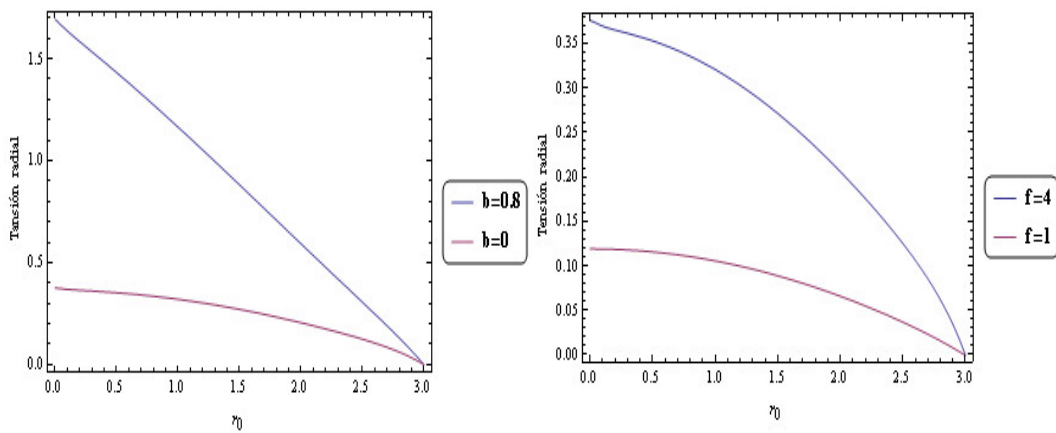


Figura 3.6. Tensión radial σ_{rr} para diferentes fuerzas ($b = 0$ y $b = 0,8$) (izquierda). Tensión radial σ_{rr} para diferentes valores de f ($f = 1$, $f = 4$) con $b = 0$ (derecha).

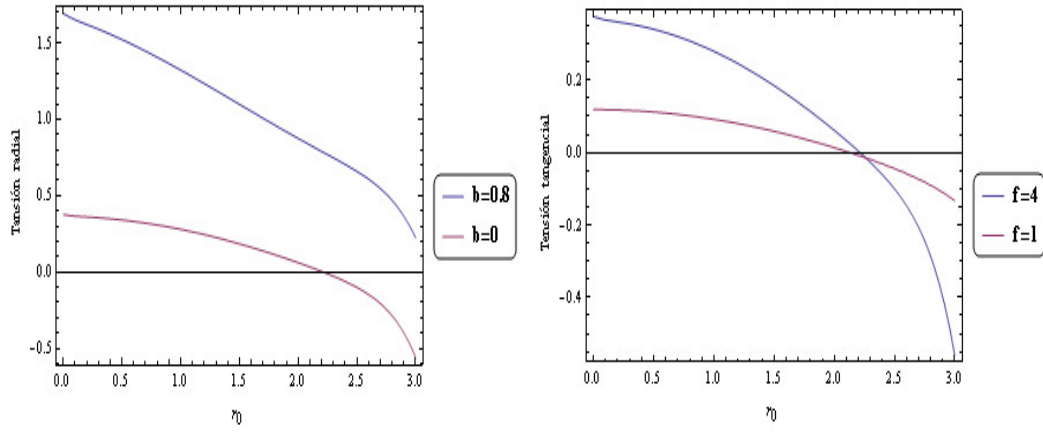


Figura 3.7. Tensión tangencial $\sigma_{\phi\phi}$ para diferentes fuerzas ($b = 0, b = 0,8$) (izquierda). Tensión tangencial $\sigma_{\phi\phi}$ para diferentes valores de f ($f = 1, f = 4$) con $b = 0$ (derecha).

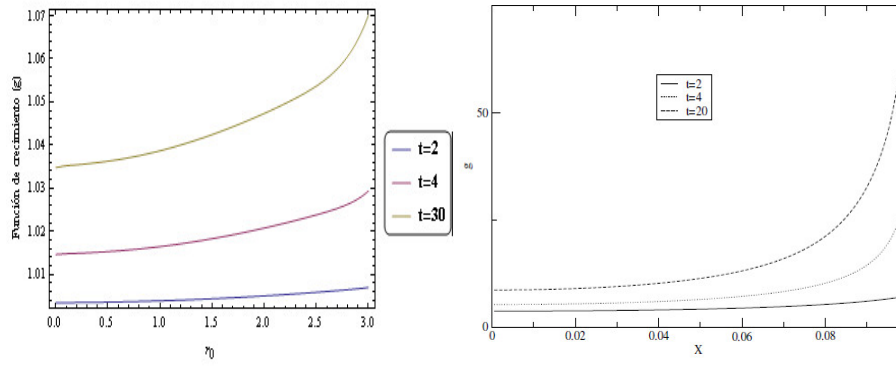


Figura 3.8. Función de crecimiento \bar{g} en diferentes momentos de tiempo del modelo desarrollado en este trabajo (izquierda). Función de crecimiento g , para diferentes momentos de tiempo, del modelo bifásico desarrollado en Ambrossi y Mollica 2004 [11] (derecha).

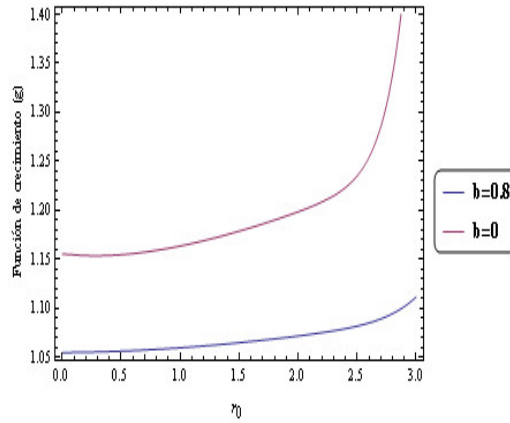


Figura 3.9. Función de crecimiento \bar{g} para diferentes fuerzas ($b = 0, b = 0,8$).

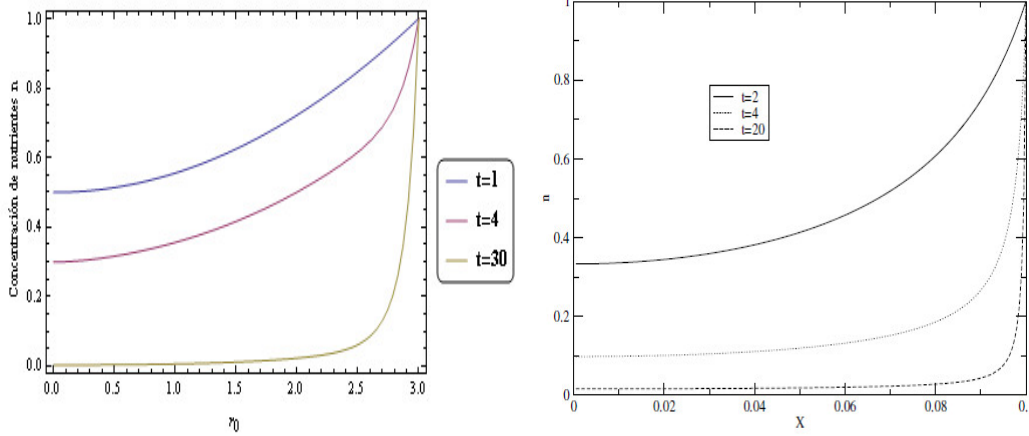


Figura 3.10. Concentración de nutrientes n en diferentes momentos de tiempo del modelo desarrollado en este trabajo (izquierda). Concentración de nutrientes n para diferentes momentos de tiempo del modelo bifásico desarrollado en Ambrossi y Mollica 2004 [11] (derecha).

En la figura 3.10 (izquierda) se muestra el comportamiento de la concentración de nutrientes n en función de la coordenada material r_0 que se obtuvo de nuestro modelo. Se observa, como se describió en la sección 3.1.3 y en el artículo de Chapman 2007 [5] que la concentración de nutrientes es máxima (constante) en la frontera y mínima en el centro del tumor. Es decir que los nutrientes que se difunden desde la frontera del tumor, son consumidos por las células en su paso hacia el interior de este y por ende la disponibilidad de nutrientes decrece según lo hace la coordenada material r_0 . Esta situación se acentúa con el paso del tiempo como se verifica en la figura 3.10 (izquierda). Por ejemplo, para $t = 30$ días las células mas internas del tumor ($r_0 \sim 0$) estarán prácticamente desprovistas de nutrientes.

En la figura 3.10 (derecha) se puede observar el comportamiento de la concentración de nutrientes que se obtuvo de un modelo bifásico desarrollado en Ambrossi y Mollica 2004 [11] (donde se puede tomar x en calidad de coordenada material), comportamiento que muestra una gran similitud con el de la concentración de los nutrientes obtenida en nuestro modelo.

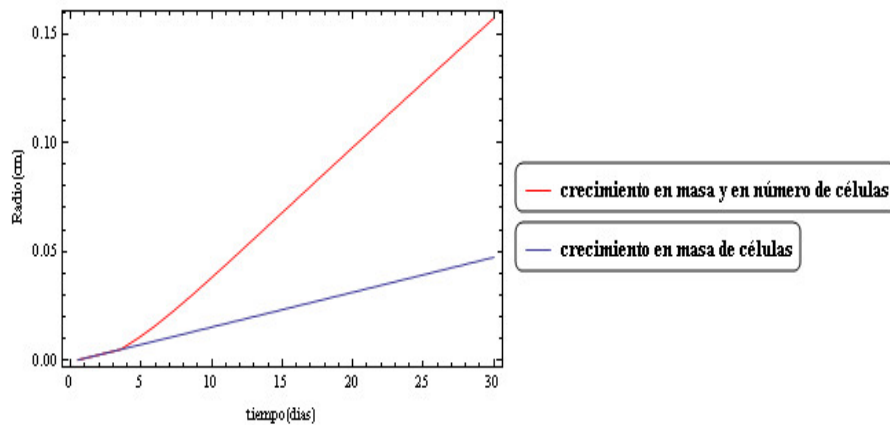


Figura 3.11. Radio del tumor (en cm).

En la figura 3.11 se comparan los radios de dos modelos de crecimiento tumoral: uno en donde se asume que el crecimiento del tumor es producto del incremento de la masa de sus células (Ariel Ramirez [15]) y el modelo propio de este trabajo, en donde se presupone que el crecimiento del tumor es debido al aumento de la masa y del número de sus células. Se puede observar que el aumento del radio en relación al tiempo al agregar la hipótesis de que en el tumor crece el número de células es mayor que cuando solo existe la premisa de que las células crecen

en tamaño (que es equivalente al crecimiento en masa). También se puede comprobar que los radios de ambos modelos coinciden en un rango de valores de tiempo, lo cual corresponde al caso límite del modelo.

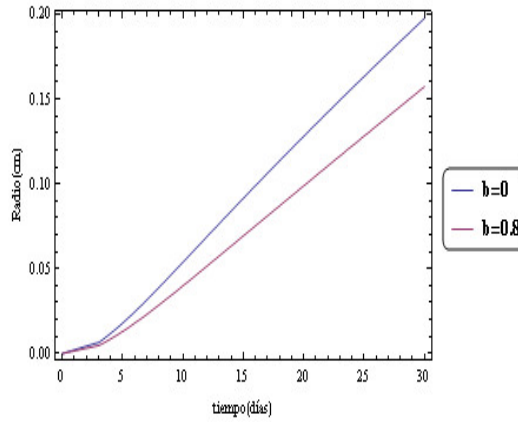


Figura 3.12. Radio del tumor para diferentes fuerzas ($b = 0$, $b = 0.8$).

La figura 3.12 muestra como las fuerzas aplicadas inhiben el crecimiento del radio del tumor, similar a como se observa en los experimentos con tumores en vitro descritos en Hemlinger et al. 2002 [3] y en (Martin et al. 2013 [10]) en los cuales se ha comprobado que las tensiones aplicadas sobre tumores avasculares inducen la apoptosis de las células cancerígenas (muerte celular) reduciendo de esta forma la proliferación celular y por ende el tamaño del tumor.

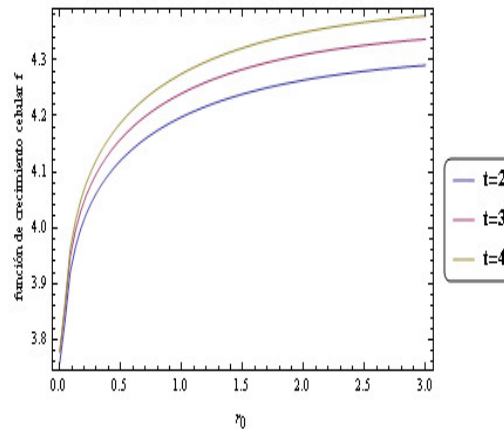


Figura 3.13. Función de crecimiento celular f en diferentes momentos de tiempo.

Conclusiones y recomendaciones

Conclusiones

- En el presente trabajo se utilizaron las leyes y ecuaciones fundamentales de la Mecánica de los Medios Continuos (leyes de balance de masa y de momento lineal, principios de difusión y ecuaciones constitutivas) para describir el comportamiento de un tumor sólido en fase avascular.
- Bajo este marco teórico se propuso un modelo en el que se tomó en cuenta que la base del crecimiento radica en el incremento del tamaño y del número de las células que conforman al tumor.
- Como vía para contrarrestar la problemática existente con respecto a la modelación simultánea de los cambios de masa y de tensión, que ocurren como consecuencia del crecimiento (pudiendo ser este celular, másico o íntegro) del tumor fue introducida la teoría de múltiples configuraciones naturales, la cual permite separar los cambios de masa y tensión en contribuciones independientes.
- Se obtuvo como resultado que el aumento del número de células (aumento de f) en ausencia de fuerzas externas ($b = 0$) aumenta las tensiones residuales y viceversa.
- El tumor incrementa su volumen con el transcurso del tiempo y la aplicación de fuerzas externas inhiben su crecimiento.
- El radio del tumor asociado al crecimiento íntegro del mismo resultó mayor que el radio correspondiente al crecimiento másico del tumor, el cual es contenido como caso límite del modelo desarrollado en el presente trabajo.
- Otros resultados fueron comparados con los existentes en la literatura.

Recomendaciones

En el modelo desarrollado el radio del tumor crece indefinidamente, no se estabiliza en el tiempo como si ocurre en los experimentos realizados con tumores avasculares en vitro (Hemlinger *et al.* [3]). Una vía para aproximarse de mejor forma al comportamiento real de esta clase de tumores con un modelo como el del presente trabajo, podría ser lo siguiente:

- Tomar en cuenta las especies celulares que juegan un papel decisivo en el desarrollo de los tumores avasculares, como son la especie de células necróticas, quiescentes y proliferantes (ver sección 3.1.3).
- El modelo podría modificarse empleando la teoría de mezclas para escribir ecuaciones de balance (de masa y de momento) para cada especie celular.
- Tomar en cuenta el carácter inhibitorio de la carencia de nutrientes en el crecimiento del tumor y de su relación con la existencia de las especies de células mencionadas.

Apéndice A

Complementos del capítulo 3

A.1. Operadores nabla y Laplaciano en coordenadas esféricas

Proposición A.1. *El operador nabla en coordenadas esféricas se escribe, en la descripción Lagrangiana como*

$$\nabla_{\mathbf{x}_0}(\bullet) = \frac{1}{r'} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r_0} e_{r_0} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \theta_0} e_{\theta_0} + \frac{1}{r_0 \cos \theta_0} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \phi_0} e_{\phi_0}. \quad (\text{A.1})$$

Demostración. Con respecto a la base (e_x, e_y, e_z) el operador nabla $\nabla_{\mathbf{x}}$ se escribe de la siguiente forma

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_i} e_i. \quad (\text{A.2})$$

Si empleamos ahora la regla de la cadena y se consideran las relaciones (3.22),

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial s_j} \frac{\partial s_j}{\partial x_i} e_i, \quad s_1 = r, \quad s_2 = \theta, \quad s_3 = \phi. \quad (\text{A.3})$$

En la transformación de coordenadas

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (\text{A.4})$$

en donde

$$\mathbf{s} = r\mathbf{e}_r + \theta\mathbf{e}_\theta + \phi\mathbf{e}_\phi, \quad (\text{A.5})$$

\mathbf{A} representa un tensor invertible cuyas componentes satisfacen las relaciones siguientes

$$A_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial s_j}. \quad (\text{A.6})$$

Entonces de la misma manera, en la transformación de coordenadas

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{s}, \quad (\text{A.7})$$

las componentes del tensor \mathbf{A}^{-1} satisfarán de manera análoga a (A.6) las siguientes relaciones

$$A_{ij}^{-1} = \frac{\partial s_i}{\partial x_j}. \quad (\text{A.8})$$

La representación matricial del tensor \mathbf{A} es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\cos\phi & -r\cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta & -r\cos\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

y por consiguiente \mathbf{A}^{-1} será

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\frac{\sin\phi}{r\cos\theta} & -\frac{\sin\theta\cos\phi}{r\cos\theta} \\ \cos\theta\sin\phi & \frac{\cos\phi}{r\cos\theta} & -\frac{\sin\theta\sin\phi}{r\cos\theta} \\ \sin\theta & 0 & \frac{r}{\cos\theta} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

lo cual equivale a conocer las relaciones (A.8) que al ser sustituidas en (A.3) determinan la forma explícita del operador nabla en coordenadas esféricas (en función de las coordenadas espaciales r, θ, ϕ)

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi, \quad (\text{A.11})$$

obsérvese que

$$\frac{\partial(\bullet)}{\partial r} = \frac{1}{r'} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r_0}, \quad (\text{A.12})$$

Entonces el operador nabla en función de las coordenadas materiales será

$$\nabla_{\mathbf{x}_0}(\bullet) = \frac{1}{r'} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r_0} \mathbf{e}_{r_0} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \theta_0} \mathbf{e}_{\theta_0} + \frac{1}{r_0 \cos \theta_0} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \phi_0} \mathbf{e}_{\phi_0}. \quad (\text{A.13})$$

□

Proposición A.2. *La parte radial del operador de Laplace en coordenadas esféricas, en la descripción Lagrangiana, se escribe como*

$$\Delta \mathbf{x}_0 = \frac{1}{(r')^2} \frac{\partial^2}{\partial r_0} - \frac{r''}{(r')^3} \frac{\partial}{\partial r_0} + \frac{2}{rr'} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r_0}. \quad (\text{A.14})$$

Demostración. De forma análoga a como se obtuvo (A.12) se obtiene la parte radial del operador de Laplace en coordenadas esféricas

$$\Delta \mathbf{x}(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r}, \quad (\text{A.15})$$

considerando (A.12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} &= \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r_0} \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r_0} \right) \\ &= \frac{1}{r'} \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial^2}{\partial r_0^2} - \frac{r''}{(r')^2} \frac{\partial}{\partial r_0} \right) \\ &= \frac{1}{(r')^2} \frac{\partial^2}{\partial r_0^2} - \frac{r''}{(r')^3} \frac{\partial}{\partial r_0}, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

finalmente tendremos

$$\Delta \mathbf{x}_0 = \frac{1}{(r')^2} \frac{\partial^2}{\partial r_0} - \frac{r''}{(r')^3} \frac{\partial}{\partial r_0} + \frac{2}{rr'} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r_0}. \quad (\text{A.17})$$

□

Apéndice B

Generalidades de la mecánica de los Medios Continuos

Proposición B.1. *La forma local de la ecuación de balance de masa en la descripción Euleriana es*

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Demostración. Para la demostración de (B.1) será de gran utilidad demostrar que

$$\dot{J} = J \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}. \quad (\text{B.2})$$

Obsérvese que el jacobiano J es una función del gradiente de deformación \mathbf{F} ($J(\mathbf{x}_0, t) = \det \mathbf{F}$) que a su vez depende del tiempo t de modo que para calcular su derivada temporal es conveniente emplear la relación (1.112), es decir

$$\dot{J} = J_{,\mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}}. \quad (\text{B.3})$$

Atendiendo a (2.42) la derivada temporal del gradiente de deformación $\dot{\mathbf{F}}$ puede escribirse como

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}\mathbf{F}. \quad (\text{B.4})$$

Según (1.111) $J_{,\mathbf{F}}$ puede expresarse de la siguiente forma

$$J_{,\mathbf{F}} = \left(I_{\mathbf{F}}^{(3)} \right)_{,\mathbf{F}} = I_{\mathbf{F}}^{(3)} \mathbf{F}^{-T} = J \mathbf{F}^{-T}, \quad (\text{B.5})$$

por tanto (B.3) se convertirá en

$$\dot{J} = J \mathbf{F}^{-T} : \mathbf{L}\mathbf{F}. \quad (\text{B.6})$$

Ahora considerando (1.70) y (2.38)

$$\mathbf{F}^{-T} : \mathbf{L}\mathbf{F} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F} : \mathbf{L} = \mathbf{I} : \mathbf{L} = \mathbf{I} : \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = \text{tr}(\mathbf{I} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) = \text{tr}(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}. \quad (\text{B.7})$$

Finalmente

$$\dot{J} = J \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}. \quad (\text{B.8})$$

Con esto en mente (2.65) toma la forma

$$\overbrace{\dot{\rho} J} = J \left(\dot{\rho} + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} \right) = 0. \quad (\text{B.9})$$

Como ρ constituye un campo espacial, su derivada material será

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla_{\mathbf{x}} \rho) \cdot \mathbf{v}. \quad (\text{B.10})$$

Debido a que $J > 0$, necesariamente el término entre paréntesis en (B.9) debe anularse,

$$\dot{\rho} + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{B.11})$$

y sustituyendo (B.10) en (B.11) se ve inmediatamente que

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla_{\mathbf{x}} \rho) \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}. \quad (\text{B.12})$$

Agrupando según la regla del producto para la derivación, se tendrá finalmente la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0.$$

La ecuación (B.1) es frecuentemente conocida en la literatura como **ecuación de continuidad**. □

B.1. Formas equivalentes de la energía de deformación

La energía $\psi(\mathbf{F})$, debida al movimiento $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}_0, t)$, es invariante ante rotaciones y traslaciones arbitrarias del cuerpo en el espacio. En consecuencia la energía de deformación $\psi(\mathbf{F})$ no difiere de la energía de deformación $\psi(\mathbf{F}^*)$, dada por el movimiento $\mathbf{x}^* = \chi^*(\mathbf{x}_0, t^*)$, que no es más que una transformación de coordenadas con respecto al movimiento \mathbf{x} ,

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}. \quad (\text{B.13})$$

Aquí \mathbf{Q} representa un tensor ortogonal ($\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-T}$).

Atendiendo a (B.13) el gradiente de deformación correspondiente al movimiento \mathbf{x}^* será

$$\mathbf{F}^* = \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{Q} \mathbf{F}. \quad (\text{B.14})$$

Atendiendo a (B.14), la función de energía ψ debe satisfacer la siguiente restricción

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{F}^*) = \psi(\mathbf{Q}\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \wedge \forall \mathbf{Q}. \quad (\text{B.15})$$

Ahora consideremos un tensor simétrico \mathbf{U} ($\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$) y un tensor ortogonal \mathbf{R} ($\mathbf{R} = \mathbf{R}^{-T}$). En virtud del teorema 1.2 (teorema de descomposición polar), podemos escribir \mathbf{F} como $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$.

Aplicando (B.15) y haciendo $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$ se obtiene

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{R}^T \mathbf{F}) = \psi(\mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U}), \quad (\text{B.16})$$

resumiendo

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{U}), \quad \forall \mathbf{F}. \quad (\text{B.17})$$

La expresión (B.17) demuestra que la función de energía de un material hiperelástico solo depende de un tensor simétrico \mathbf{U} , siempre que \mathbf{F} pueda descomponerse como $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$.

Bibliografía

- [1] Itskov, M., 2009, *Tensor algebra and tensor analysis for engineers*, Second Edition, Springer, ISBN: 978-3-540-93906-1. Citado en la pág 5, 15.
- [2] Bertram, A., 2008, *Elasticity and plasticity of large deformations* 2nd Ed., Springer, ISBN: 978-3-540-69399-4. Citado en la pág 24, 51.
- [3] Helmlinger, G., Netti, P. A. Melder, R. J., Jain, R. K., Lichtenbeld-Dubois, H., 2002, *Modulation of multicellular aggregates by pressure from growth in a Matrix*, Patent No. US 6,368,858 B1. Date of patent: April 9. Citado en pág 47, 59 y 62.
- [4] Rajagopal, K. R., L. Tao, 1995 *Mechanics of Mixtures*, Singapore; River Edge, NJ: World Scientific. Citado en pág 2, 43
- [5] Tiina Roose, S. Jonathan Chapman, Philip K. Maini, 2007, *Mathematical Models of Avascular Tumor Growth*, SIAM Rev, vol. 49, pp.179-208 Citado en pág 180, 181
- [6] G.A. Ateshian, J.D. Humphrey, 2012, *Continuum Mixture Models of Biological Growth and Remodeling: Past Successes and Future Opportunities*, Annu. Rev. Biomed. Eng., vol.14, pp. 97-111. Citado en pág 5
- [7] Ambrosi, D., Guana, F., 2007, *Stress modulated growth*, Math. Mech. Solids, vol. 12, p. 319-343. Citado en pág 55
- [8] DiCarlo, A., Quiligotti, S., 2002, *Growth and balance*, Mech. Res. Commun., vol. 29, p. 449-456. Citado en pág 55
- [9] Helen Byrne, Luigi Preziosi, 2003 *Modelling solid tumour using the theory of mixtures*, Math, Med, Biology, vol.20, pp. 341-366. Citado en pág 344, 345
- [10] Triantafyllos Ltykianopoulos, Jhon D. Martin, Matija Snuderl, Fotios Mpkris, Soloni R. Jain, Rakesh K. Jain, 2013. *Coevolution of Solid Stress and Interstitial Fluid Pressure in Tumors During Progression: Implications for Vascular Collapse*, Cancer Res, vol.73, pp.3833-3841. Citado en pág 1, 2
- [11] D. Ambrossi, F. Mollica 2004. *The role of stress in the growth of a multicell espheroid*, J. Math. Biol. vol 48, pp.477-499. Citado en pág 492
- [12] L. Graziano, L. Preziosi. *Mechanics in Tumor Growth*, Polytechnic of Turin, Torino, Italy
- [13] D. Ambrossi, F. Guana. 2005 *Stress-Modulated Growth*, Math, Mech, Solids pp.1-26
- [14] Ariel Ramirez Torres. *Modelación matemática de las respuestas mecánicas en el crecimiento de un tumor* [Tesis de Maestría]. Habana, Cuba: Universidad de La Habana; 2014
- [15] Ariel Ramirez Torres. *Aproximación biomecánica del crecimiento de un tumor* [Tesis de Licenciatura]. Habana, Cuba : Universidad de La Habana; 2012
- [16] Cristóbal Sebastián Quiñinao Montero. *Modelación y simulación numérica del crecimiento de tumores y de algunas terapias antitumorales* [Tesis de Licenciatura], Santiago de Chile, Chile: Universidad de Chile; 2010
- [17] Holzapfel, G. A., 2000, *Nonlinear solids mechanics: A continuum approach for engineering*, John Wiley & Sons Ltd, ISBN 0-471-82319-8. Citado en pág 33, 55, 57, 103
- [18] Davide Ambrossi, Krishna Garikipati, 2008, *The Mathematics of growth and remodelling of soft biological tissues*, vol.39, pp. 2219-2258.
- [19] D. Ambrossi, L. Preziosi, 2002, *On the closure of mass balance models for tumor growth*, Math, Meth, Appl, vol.12(5), pp.737-754.
- [20] G. J. Pettet, C. P. Please, M. J. Tindall, D. L. S. Mc Elwain 2001, *The migration of cell in multicell tumor spheroids*, Bull, Math, Biol, vol.63, pp. 213-257.
- [21] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, 1969, *Teoría de la elasticidad*, Reverté S.A., Academias de Ciencias de la U.R.S.S. Citado en pag 5, 6