

Facultad de Matemática y Computación

Centro de Estudios de Matemática
para las Ciencias Técnicas (CEMAT)



Universidad de La Habana



ISPJAE

Tesis presentada en opción al grado
Maestro en Ciencias Matemáticas

Modelación matemática de las respuestas mecánicas en el crecimiento de un tumor

Autor:

Lic. Ariel Ramírez Torres

Tutores:

Dr. Reinaldo Rodríguez Ramos. Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana

Dr. Julián Bravo Castillero. Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana

Dr. Raúl Guinovart Díaz. Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana

La Habana, 2014

A mi madre y mi hermano

Agradecimientos

A mi mamá y mi hermano, por estar siempre cuando los he necesitado y por apoyarme en todas mis decisiones.

A mis tutores Reinaldo, Raúl y Julián, por dedicarme el tiempo que no tenían y por darme consejos para mi futuro.

Índice

1	Preliminares	5
1.1	Análisis tensorial	5
1.1.1	Tensor de segundo orden como aplicaciones lineales	5
1.1.2	Producto tensorial	6
1.1.3	Representación de un tensor respecto a una base	6
1.1.4	Cambio de bases	8
1.1.5	Operaciones con tensores de segundo orden	8
1.1.6	Producto escalar de tensores de segundo orden	11
1.1.7	Funciones tensoriales. Cálculo diferencial	12
1.1.8	Divergencia de un campo tensorial	13
1.1.9	Derivadas de funciones escalares tensoriales	14
1.2	Cinemática	17
1.2.1	Configuraciones y movimiento de un cuerpo continuo	18
1.2.1.1	Configuración	18
1.2.1.2	Movimiento	19
1.2.2	Campo de desplazamiento, de velocidad y de aceleración	20
1.2.2.1	Campo de desplazamiento	20
1.2.2.2	Campo de velocidad y de aceleración	20
1.2.3	Derivadas materiales y espaciales	21
1.2.3.1	Derivada material de un campo material	21
1.2.3.2	Derivada espacial de un campo espacial	22
1.2.3.3	Derivada material de un campo espacial	22
1.2.4	Gradiente de deformación	23
1.2.4.1	Gradiente de velocidad material y espacial	26
1.3	Concepto de tensión	26
1.3.1	Vectores de tracción y tensores de tensión	26
1.4	Ecuaciones de balance	29
1.4.1	Conservación de la masa	29
1.4.2	Conservación del momento lineal	32
1.4.3	Ecuación del movimiento	33
1.5	Relaciones constitutivas	35
1.5.1	Comentarios generales sobre ecuaciones constitutivas	35
1.5.1.1	Ecuaciones constitutivas para materiales hiperelásticos	35
1.5.1.2	Formas equivalentes de la función de energía de deformación	36
1.5.1.3	Formas reducidas de las ecuaciones constitutivas	36
1.5.2	Materiales hiperelásticos isotrópicos	37
2	Crecimiento de un tumor	41
2.1	Descripción biomédica	41
2.2	Breve introducción a la teoría de mezclas	43
2.2.1	Ecuación de balance de masa para la mezcla	45
2.2.2	Ecuación de balance de momento lineal para la mezcla	46
2.3	Breve introducción a la teoría de múltiples configuraciones naturales	47
2.4	Crecimiento de un tumor como un medio homogéneo	49

2.4.1	Relaciones geométricas	50
2.4.2	Ecuaciones de balance	52
2.4.2.1	Balance de masa	52
2.4.2.2	Balance de momento lineal	53
2.4.3	Principio de disipación de la energía	57
2.4.4	Evolución de la concentración de nutrientes	59
2.4.5	Ley de crecimiento	60
2.4.6	Planteamiento matemático del problema	60
2.4.7	Presentación y análisis de los resultados	61
2.5	Comparación de los resultados con datos experimentales	64
3	Conclusiones generales y recomendaciones	67
3.1	Conclusiones generales	67
3.2	Recomendaciones	67
A	Comprobando condiciones de existencia y unicidad	69

Introducción

La Mecánica es la rama de la física que relaciona el movimiento con las fuerzas aplicadas. Por su parte, la Mecánica de Medios Continuos estudia la respuesta de materiales, ambos sólidos y fluidos (incluyendo gases), a nivel macroscópico cuando están sujetos a diferentes condiciones de carga. Mientras que el movimiento de cuerpo rígido es estudiado en esta teoría como una reducción especial, la deformación de materiales bajo la aplicación de cargas constituye su aplicación más común. El sujeto de la Mecánica de Medios Continuos se divide en dos partes primarias: los principios generales, es decir, las ecuaciones gobernantes y las relaciones constitutivas. Los principios generales son comunes a todos los materiales (conservación de masa y energía, conservación de momento lineal y angular, principio de entropía, etc). Las relaciones constitutivas son ecuaciones que definen a los materiales. En general, estas varían de un material a otro, y para un material dado, pueden variar en dependencia de las condiciones de carga. La elegancia de la Mecánica de Medios Continuos se basa en su postulación matemática la cual genera un tratamiento conciso de las ecuaciones gobernantes y las relaciones constitutivas.

El mundo biológico es una parte del mundo físico que nos rodea y naturalmente es un objeto de estudio en Mecánica. La Biomecánica busca comprender la mecánica de los sistemas vivos. La motivación para la investigación en esta área viene de la comprensión de que la Biología no puede sobrentenderse sin la Biomecánica, como un aeroplano no puede entenderse sin la aerodinámica. Para un aeroplano, la Mecánica nos habilita para diseñar su estructura y predecir su ejecución. Para un organismo vivo, la Biomecánica nos ayuda en la comprensión de su estado normal, predice cambios debido a alteraciones, y propone métodos de intervención artificial. El campo de la Biomecánica incluye los tópicos siguientes: distribución de la tensión y la deformación en materiales, ecuaciones constitutivas que describen las propiedades mecánicas de los materiales, fortaleza de materiales, materiales compuestos, flujo de fluidos, transferencia de calor y distribución de temperatura, transferencia de masa, difusión, transporte a través de las membranas, mecanismos, estructuras, estabilidad de sistemas mecánicos, control de sistemas mecánicos, dinámica, vibraciones y propagación de ondas. Es difícil hallar algo vivo que no involucre alguno de estos tópicos.

Desde hace varias décadas la Biomecánica se ha convertido en un área de gran interés dentro de la Mecánica de Medios Continuos y ha estado presente en varios avances modernos de la medicina y la tecnología. Ha ayudado a resolver problemas clínicos concernientes al sistema cardiovascular con la invención de las válvulas protésicas de corazón, las máquinas de hemodiálisis, entre otros. Investigaciones recientes se han enfocado en la tensión que actúa en las células endoteliales¹. Un desarrollo más vigoroso de la Biomecánica está asociado con la ortopedia. En la ortopedia, dicha teoría se convierte en una herramienta clínica diaria. La investigación fundamental ha incluido no solo cirugía, prótesis e implantes de miembros artificiales, sino también aspectos celulares y moleculares. Una de las más importantes contribuciones de la Biomecánica moderna en la medicina probablemente estribe en su promoción de una mejor comprensión de la fisiología. La metodología y normas de la Mecánica, trata con problemas complejos de la ciencia y la tecnología de la salud. Así, el análisis de un sistema, la reología de tejidos biológicos², la transferencia de masa a través de membranas y la microcirculación, fortalezas tradicionales de la biomecánica, se están convirtiendo en nociones comunes en medicina.

En la actualidad una de las primeras causas de muerte en el mundo es la ocasionada por el cáncer. Un reciente informe desarrollado por la agencia internacional World Health Organizations International

¹Una célula endotelial es un tipo de célula aplanada que recubre el interior de los vasos sanguíneos y sobre todo de los capilares, formando parte de su pared.

²La reología es la parte de la física que estudia la relación entre el esfuerzo y la deformación en los materiales que son capaces de fluir.

Agency for Research on Cancer (IARC) ilustra que América del Norte es la región con más diagnósticos de cáncer en adultos, seguida estrechamente por Europa Occidental, Australia y Nueva Zelanda. A nivel mundial en el 2008 causó 7.6 millones de defunciones. Se prevé que las muertes por cáncer sigan aumentando en todo el mundo y alcancen la cifra de 13.1 millones en 2030.

Con el objetivo de desarrollar tratamientos efectivos, es importante identificar los mecanismos que controlan el proceso de evolución del cáncer, cómo interactúan y cómo pueden ser manipulados para erradicar la enfermedad. A través del desarrollo y solución de modelos matemáticos que describen los diferentes aspectos del crecimiento de un tumor, las matemáticas aplicadas tienen el potencial de prevenir la experimentación excesiva y de proveer a los biólogos con comprensiones complementarias de los mecanismos que pueden controlar el desarrollo de tumores sólidos (Byrne [1]). La Bioquímica juega actualmente un papel más importante, pero existe un consenso en que la Mecánica, y en particular la Mecánica de Medios Continuos, constituye la herramienta correcta en el estudio de diversas preguntas abiertas. Motivo por el cual, se ha estado estudiando desde el punto de vista matemático, cómo ocurre el proceso de evolución de un tumor (Agus y Michor [2]). Debido a la existencia de disímiles tipos de tumores, con orígenes y características diferentes y de los diversos factores que influyen en su desarrollo, todavía no se ha logrado obtener una descripción unificada de como ocurre la evolución de un tumor. Sin embargo, nuevos descubrimientos referentes a distintas áreas de investigación de dicha enfermedad se han llevado a cabo durante los últimos años, los científicos a menudo han recurrido a los modelos matemáticos con el objetivo de explicar e interpretar sus investigaciones experimentales. Nuevas estrategias, técnicas experimentales y acercamientos teóricos, usando la Mecánica de Medios Continuos, están emergiendo en la investigación del cáncer.

El estudio del crecimiento de un tumor sólido ha tenido una considerable popularidad entre los matemáticos, pero no fue hasta la década de 1970 que se propusieron trabajos experimentales conjunto con modelos matemáticos (Liotta et al. [3] y [4] y Seidel et al. [5]). Los años 90 presenciaron una explosión en la publicación de artículos matemáticos referentes al crecimiento de un tumor sólido, apareciendo muchos más trabajos en esta década que en todos los años previos combinados, entre ellos se pueden citar los trabajos de Please et al. [6] y Skalak et al. [7]. Los diferentes modelos referentes al desarrollo de tumores pueden ser clasificados en dos secciones principales:

- Modelos continuos sólidos (o líquidos) de una fase

En estos tipos de modelos el comportamiento del material está gobernado por las leyes de conservación de masa, momento, energía y entropía. Un modelo elástico no lineal fue implementado por Chaplain y Sleeman [8] donde el tumor fue tratado como un globo que se iba inflando caracterizando al material por una función de energía de deformación. En Jones et al. [9], el tumor fue considerado como un material elástico lineal e isotrópico donde la respuesta elástica fue asumida proporcional al cambio en la deformación en cualquier intervalo pequeño del tiempo. En los trabajos presentados por Taber y Eggers [10], Taber y Perucchio [11], se utilizó la técnica de la descomposición multiplicativa del gradiente de la deformación total, en dos componentes, una referente a la elasticidad y otra al crecimiento. Más adelante, Ambrosi y Mollica [12] usaron un modelo sólido elástico de una fase para analizar el crecimiento de un tumor usando la teoría de múltiples configuraciones naturales descrita en [13]. El tumor fue considerado como un material hiperelástico, donde se usaron suposiciones constitutivas específicas para modelar el cuerpo como un material elástico no lineal y compresible. Después de haber desarrollado una formulación matemática general del problema, en otro trabajo Ambrosi y Mollica [14], presentan simulaciones numéricas del crecimiento de una esferoide multicelular.

- Modelos multi-fásicos

Los modelos continuos, incluyendo dos o más constituyentes que interactúan entre sí, han sido ampliamente aplicados en varios materiales biológicos, tanto en tejidos blandos, como en células [15, 16, 17, 18, 19]. La teoría de mezclas ha sido ampliamente aplicada para estudiar este tipo de modelos, la cual está basada en la suposición de que el dominio considerado es continuo y cada punto

del dominio consiste de partículas pertenecientes a ambos constituyentes. Por tanto se requiere que los materiales sean densos, de modo que puedan ser homogeneizados sobre la región de la mezcla. Dicha teoría, puede ser satisfactoriamente empleada para describir interacciones complejas que tienen lugar entre los componentes que forman la mezcla. Un modelo sólido-fluido fue implementado por Chen et al. [20] con el propósito de estudiar el efecto mecánico del medio circundante en el crecimiento del tumor. Ambrosi y Preziosi [21] modelaron un esferoide multi-celular como un material multi-fásico consistiendo de un esqueleto sólido constituido por un conjunto de células (consideradas como una membrana elástica) y una fase líquida relleno el espacio extra-celular, usada por el tumor para crecer. El modelado de un tumor usando la ley de Darcy para representar el comportamiento del fluido en un medio poroso ha sido estudiado por Baxter y Jain [22, 23], Pozrikidis y Farrow [24], este último considerando los intersticios como un material poroso isotrópico.

Como se puntualiza en Unnikrishnan et al. [25], estos trabajos dejan claro que hay mucho trabajo prometedor en la utilización de la teoría de mezclas aplicada al problema de crecimiento biológico.

En la presente tesis se desarrolla un nuevo modelo con el objetivo de caracterizar el proceso de desarrollo de un tumor encapsulado. La evolución de dicho cuerpo es derivada de las ecuaciones de balance, así como de principios de conservación suplementados con leyes de difusión para describir la evolución de los nutrientes que el tumor recibe para su desarrollo. Además, se utilizan las nociones de la teoría de mezclas y de la teoría de múltiples configuraciones naturales. Esta última, constituye un escenario ideal para investigar el proceso de crecimiento. De hecho, la dificultad esencial al formalizar la dinámica de crecimiento, es modelar simultáneamente el cambio en masa y las tensiones que acompañan a dicho cambio, posiblemente causado por la aplicación de cargas o por el mismo crecimiento en sí. La teoría de múltiples configuraciones naturales posibilita separar tales contribuciones por medio de una vía elegante y además modelarlas de forma individual. Luego, a partir de las herramientas que brindan la Mecánica de Medios Continuos, la teoría de mezclas y la teoría de múltiples configuraciones naturales, se estudian los aspectos mecánicos presentes en la variación volumétrica de un tumor, así como las tensiones que tienen lugar durante dicha evolución, ya sean producto del crecimiento en sí o por la aplicación de fuerzas.

Objetivos de la tesis

Los objetivos de la tesis se pueden resumir como sigue:

- Deducir un modelo general que describa las tensiones y el crecimiento de un tumor sólido continuo compresible y con respuesta hiperelástica.
- Obtener soluciones aproximadas del modelo a través de su resolución numérica.
- Comparar los resultados obtenidos con datos experimentales.

Descripción de la tesis

La tesis contiene cuatro capítulos: en el capítulo 1, se presentan conceptos y resultados generales del Análisis Tensorial, la Mecánica de Medios Continuos, la teoría de mezclas y la teoría de múltiples configuraciones naturales, que sirvan de fundamento y orientación a las ideas que se desarrollan en los restantes capítulos. En el capítulo 2 se desarrolla un nuevo modelo que describa el proceso de crecimiento de un tumor sólido aplicando la teoría presentada en el capítulo 1. Asimismo, se presentan los resultados obtenidos al resolver numéricamente el modelo y se comparan con estudios experimentales. Finalmente en el capítulo 3 se presentan las conclusiones y recomendaciones del trabajo realizado.

Aspectos novedosos de la tesis

Como aspectos novedosos de esta tesis respecto a aquellos trabajos reportados en la literatura que se ha podido consultar, están:

- Desarrollo de un nuevo modelo para describir el crecimiento de un tumor.

- Estudio de las consecuencias, que traen consigo la aplicación de fuerzas prefijadas, en el proceso de crecimiento.

Producción científica

Los resultados obtenidos hasta el momento, han sido:

Publicados en revistas de impacto:

- **A. Ramírez-Torres**, R. Rodríguez-Ramos, R. Gluge, J. Bravo-Castillero, R. Guinovart-Díaz, R. Rodríguez-Sanches, 2013, *Biomechanic approach of a growing tumor*, Mechanics Research Communications, vol. 51, pp. 32-38.

Publicados en memorias de eventos con arbitraje

- **Ariel Ramírez Torres**, Reinaldo Rodríguez Ramos, 2011, *Modelación matemática del crecimiento de un tumor dentro del rango de la mecánica de medios continuos*. COMPUMAT. Noviembre 23-25. ISBN 978-959-250-658-9.
- **Ariel Ramírez Torres**, Reinaldo Rodríguez Ramos, Julián Bravo Castillero, Raúl Guinovart Díaz, 2013, *Aproximación biomecánica del crecimiento de un tumor*. COMPUMAT. Noviembre 27-29. ISBN 978-959-286-022-3.

Presentados en eventos y congresos, tanto nacionales como internacionales

- XII Congreso de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación COMPUMAT 2011. Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas. Noviembre 23-25, 2011. Villa Clara, Cuba.
- XV International Workshop on Wavelets, Differential Equations, Mechanics and Applications. Universidad de La Habana. Febrero 20-24, 2012. La Habana, Cuba.
- XVI International Workshop on Wavelets, Differential Equations, Mechanics, Number Theory and Financial Mathematics. Universidad de la Habana. Febrero 18-22, 2013. La Habana, Cuba.
- Congreso Internacional COMPUMAT 2013. Universidad de las Ciencias Informáticas. Noviembre 27-29, 2013. La Habana, Cuba.

Presentados en seminarios

- *Sobre la mecánica del crecimiento de un tumor*, 2011. Universidad de Medicina “Manuel Fajardo”. La Habana, Cuba.
- *Aproximación biomecánica del crecimiento de un tumor*, 2011. Centro de Inmunología Molecular, (CIM). La Habana, Cuba.
- *Micromechanical approach for modelling composites with complex contact at the interfaces and application of non-linear continuum mechanics approach for studying tumor growth*, 2013. Laboratoire d’Innovation et d’Analyse de Bioperformance. École Polytechnique de Montréal. Montreal, Canadá.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1 Análisis tensorial

Puesto que las propiedades de los sólidos no dependen del sistema de coordenadas elegido para su estudio, las ecuaciones de la Mecánica de Medios Continuos tienen forma tensorial. Es decir, las magnitudes básicas que aparecen son tensores, lo cual permite escribir las ecuaciones en una forma básica que no varía de un sistema de coordenadas a otro. Por tal motivo, se hace necesario, tener una comprensión de lo que es un tensor y conocer las propiedades que cumplen, para poder maniobrar con ellos. El análisis presentado en este capítulo se basa en el libro de Istkov [26]. Otro de los objetivos principales del actual capítulo es la obtención de las derivadas de los invariantes de un tensor, las cuales serán de utilidad para cálculos futuros.

1.1.1 Tensores de segundo orden como aplicaciones lineales

Definición 1.1. Sea el conjunto Lin^n de todas las aplicaciones lineales de \mathbb{E}^n (espacio euclidiano de dimensión n) en \mathbb{E}^n . Tal aplicación puede ser escrita de la siguiente forma

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n, \quad \forall \mathbf{A} \in Lin^n. \quad (1.1)$$

Los elementos del conjunto Lin^n se llaman tensores de segundo orden o simplemente tensores.

Definición 1.2. Se define el producto de un tensor por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ como

$$(\alpha \mathbf{A})\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\alpha \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n, \quad (1.2)$$

y la suma de dos tensores \mathbf{A} y \mathbf{B} como

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n. \quad (1.3)$$

La linealidad de la aplicación (1.1) se expresa por las siguientes relaciones:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n, \quad \forall \mathbf{A} \in Lin^n, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{A}(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{A} \in Lin^n. \quad (1.5)$$

Definición 1.3. Se define el tensor cero ($\mathbf{0}$) y el tensor identidad (\mathbf{I}) de la siguiente manera

$$\mathbf{0}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n \quad (1.7)$$

Entonces de lo realizado hasta ahora, se deduce que el conjunto Lin^n es un espacio vectorial. Luego $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in Lin^n$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, las propiedades de los tensores se pueden resumir de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad (1.10)$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}, \quad (1.11)$$

$$\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}, \quad (1.12)$$

$$1\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad (1.13)$$

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}, \quad (1.14)$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}. \quad (1.15)$$

1.1.2 Producto tensorial

El producto tensorial juega un papel importante debido a que permite construir un tensor de segundo orden a partir de dos vectores. Consideremos dos vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$ entonces,

Definición 1.4. El producto tensorial se define de la siguiente forma

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}), \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n, \quad (1.16)$$

donde “ \cdot ” representa el producto escalar en \mathbb{E}^n .

El producto “ \otimes ” de dos vectores de \mathbb{E}^3 debe entenderse de la siguiente manera

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

La aplicación (1.16) denotada por el símbolo \otimes es lineal, es decir dados $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$ y $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se cumple

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a}[\mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y})] = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x} + (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{y}, \quad (1.18)$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\alpha\mathbf{x}) = \mathbf{a}[\mathbf{b} \cdot (\alpha\mathbf{x})] = \alpha(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a} = \alpha(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x}, \quad (1.19)$$

entonces se puede asegurar que, el producto tensorial de dos vectores representa un tensor de segundo orden.

Proposición 1.1. Para el producto tensorial de vectores se tiene que

$$\mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{c}, \quad (1.20)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}, \quad (1.21)$$

$$(\alpha\mathbf{a}) \otimes (\beta\mathbf{b}) = \alpha\beta(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}). \quad (1.22)$$

Demostración. Veamos sólo la demostración de (1.20), pues para demostrar (1.21) y (1.22) se sigue un análisis similar. Obsérvese que

$$\mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{x} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{c})\mathbf{x},$$

y como la igualdad se cumple para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$, entonces se tiene (1.20). \square

1.1.3 Representación de un tensor respecto a una base

Como se ha visto anteriormente, el conjunto de los tensores de segundo orden Lin^n constituye un espacio vectorial. Ahora se mostrará, con ayuda del producto tensorial, que es posible construir una base en Lin^n .

Definición 1.5. Sea $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$ una base de \mathbb{E}^n . Entonces una base $\mathcal{F}' = \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \dots, \mathbf{f}^n\}$ de \mathbb{E}^n se llama base dual de \mathcal{F} , si

$$\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}^j = \delta_i^j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (1.23)$$

donde

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

se denomina delta de Kronecker.

Teorema 1.1. Sea $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$ y $\mathcal{G} = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n\}$ dos bases arbitrarias de \mathbb{E}^n . Entonces, los tensores $\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j$ ($i, j=1, 2, \dots, n$) representan una base de Lin^n . La dimensión del espacio vectorial Lin^n es entonces n^2 .

Demostración. Primero se demuestra que todo tensor en Lin^n representa una combinación lineal de los tensores $\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j$ ($i, j=1, 2, \dots, n$). Luego, sea $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$ arbitrario fijo y considere la siguiente combinación lineal

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j) \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j, \quad (1.24)$$

donde $\mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j = \mathbf{f}^i \cdot (\mathbf{A} \mathbf{g}^j)$ y \mathbf{f}^i y \mathbf{g}^j son las bases duales asociadas a \mathcal{F} y \mathcal{G} respectivamente.

Los tensores \mathbf{A}' y \mathbf{A} coinciden si y solo si $\mathbf{A}' \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ fijo arbitrario, entonces

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{f}^i = x_j \mathbf{g}^j, \quad (1.25)$$

por tanto

$$\mathbf{A}' \mathbf{x} = (\mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j) \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j (x_k \mathbf{g}^k) = (\mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j) \mathbf{f}_i x_k \delta_j^k = x_j (\mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j) \mathbf{f}_i.$$

Por otro lado, de la linealidad de la aplicación \mathbf{A}

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = x_j \mathbf{A} \mathbf{g}^j, \quad (1.26)$$

y además

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{f}_i = (\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{x}) \mathbf{f}_i. \quad (1.27)$$

Luego en virtud de (1.26) y (1.27) se tiene que

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = x_j \mathbf{A} \mathbf{g}^j = x_j (\mathbf{A} \mathbf{g}^j)^i \mathbf{f}_i = x_j [\mathbf{f}^i \cdot (\mathbf{A} \mathbf{g}^j)] \mathbf{f}_i = x_j (\mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{g}^j) \mathbf{f}_i.$$

Entonces $\mathbf{A}' \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ y por tanto $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$.

Los tensores $\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j$ son linealmente independientes, pues en caso contrario, existen escalares α^{ij} no todos nulos tales que, $\alpha^{ij} \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j = \mathbf{0}$, es decir, para $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$\alpha^{ij} (\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j) \mathbf{x} = \alpha^{ij} \mathbf{f}_i (\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{x}) = 0,$$

como \mathcal{G} es base $\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{x} \neq 0$. Luego $\alpha^{ij} \mathbf{f}_i = 0$ y esto contradice el hecho de que \mathcal{F} es una base. \square

Entonces respecto a las bases $\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_j$, $\mathbf{f}^i \otimes \mathbf{f}^j$, $\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^j$ y $\mathbf{f}^i \otimes \mathbf{f}_j$, ($i, j = 1, 2, \dots, n$), un tensor $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$ se puede escribir como

$$\mathbf{A} = A^{ij} \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_j = A_{ij} \mathbf{f}^i \otimes \mathbf{f}^j = A_{.j}^i \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^j = A_{.i}^j \mathbf{f}^i \otimes \mathbf{f}_j, \quad (1.28)$$

donde

$$A^{ij} = \mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{f}^j, \quad A_{ij} = \mathbf{f}_i \mathbf{A} \mathbf{f}_j, \quad A_{.j}^i = \mathbf{f}_i \mathbf{A} \mathbf{f}^j, \quad A_{.i}^j = \mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{f}_j.$$

Note que, el subíndice “ \cdot ” indica la posición del índice superior. Es decir, para las componentes $A_{.j}^i$, i es el primer índice, mientras que para las componentes $A_{.i}^j$, j es el segundo índice.

1.1.4 Cambio de bases

Ahora, se verá cómo las componentes de un tensor de segundo orden se transforman al aplicar un cambio de base. Sea entonces $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$. De acuerdo a (1.28),

$$\mathbf{A} = A^{ij} \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_j = A_{ij} \mathbf{f}^i \otimes \mathbf{f}^j = A_{\cdot j}^i \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^j = A_{\cdot i}^j \mathbf{f}^i \otimes \mathbf{f}_j, \quad (1.29)$$

pero

$$A^{ij} = \mathbf{f}^i \mathbf{A} \mathbf{f}^j = (f^{il} \mathbf{f}_l) \mathbf{A} (f^{jk} \mathbf{f}_k) = A_{\cdot k}^i f^{kj} = f^{il} A_{lk} f^{kj}, \quad (1.30)$$

$$A_{ij} = \mathbf{f}_i \mathbf{A} \mathbf{f}_j = (f_{il} \mathbf{f}^l) \mathbf{A} (f_{jk} \mathbf{f}^k) = A_{\cdot k}^l f_{lj} = f_{il} A^{lk} f_{kj}, \quad (1.31)$$

donde $i, j = 1, 2, \dots, n$. Las reglas de transformación (1.30) y (1.31) se mantienen válidas no solo para las bases duales. En efecto, sean \mathbf{f}_i y $\bar{\mathbf{f}}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), dos bases arbitrarias en \mathbb{E}^n , entonces

$$\mathbf{A} = A^{ij} \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_j = \bar{A}^{ij} \bar{\mathbf{f}}_i \otimes \bar{\mathbf{f}}_j, \quad (1.32)$$

pero \mathbf{f}_i se puede representar de la siguiente forma

$$\mathbf{f}_i = a_i^j \bar{\mathbf{f}}_j, \quad (1.33)$$

luego

$$\mathbf{A} = A^{ij} \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_j = A^{ij} (a_i^k \bar{\mathbf{f}}_k) \otimes (a_j^l \bar{\mathbf{f}}_l) = A^{ij} a_i^k a_j^l \bar{\mathbf{f}}_k \otimes \bar{\mathbf{f}}_l, \quad (1.34)$$

por tanto

$$\bar{A}^{kl} = A^{ij} a_i^k a_j^l, \quad k, l = 1, 2, \dots, n. \quad (1.35)$$

El tensor identidad definido por (1.7), para una base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ se escribe como

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i. \quad (1.36)$$

1.1.5 Operaciones con tensores de segundo orden

En la Sección 1.1.1 se ha visto que el conjunto Lin^n representa un espacio vectorial de dimensión finita. En donde además se mostró algunas operaciones como la suma y el producto por un escalar. Pero, para tensores de segundo orden, se pueden definir otras operaciones, por ejemplo, la composición, la transposición o la inversión.

Definición 1.6. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Lin}^n$ dos tensores de segundo orden. Entonces, el tensor $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}$ se llama composición de \mathbf{A} y \mathbf{B} , si

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n. \quad (1.37)$$

La composición de tensores en general no es conmutativa, es decir, $\mathbf{A}\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\mathbf{A}$. Además, se cumplen las siguientes propiedades

$$\mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (1.38)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad (1.39)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}, \quad (1.40)$$

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{C}\mathbf{A}, \quad (1.41)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}. \quad (1.42)$$

La relación (1.40) se puede probar como sigue

Demostración.

$[A(B + C)]x = A[(B + C)x] = A(Bx + Cx) = A(Bx) + A(Cx) = (AB)x + (AC)x = (AB + AC)x$,
y como $x \in \mathbb{E}^n$ es arbitrario, se tiene la igualdad (1.40). \square

Las demás relaciones se demuestran de manera similar.

Definición 1.7. Para el producto tensorial (1.16) se define la composición como

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (b \cdot c)a \otimes d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{E}^n. \quad (1.43)$$

De hecho, en virtud de (1.16), (1.19) y (1.37), para todo $x \in \mathbb{E}^n$

$$(a \otimes b)(c \otimes d)x = (a \otimes b)[(c \otimes d)x] = (d \cdot x)(a \otimes b)c = (d \cdot x)(b \cdot c)a = (b \cdot c)(a \otimes d)x = [(b \cdot c)a \otimes d]x.$$

Luego se puede escribir

$$AB = A^{ik}B_{ik}^j f_i \otimes f_j = A_{ik}B^{kj} f^i \otimes f_j = A_{ik}^j B_{kj}^i f_i \otimes f^j = A_{ik}^j B_{kj}^i f^i \otimes f^j, \quad (1.44)$$

donde A y B son dados en la forma (1.28).

Con ayuda de (1.37) se define la potencia k -ésima ($k = 1, 2, 3, \dots$) de un tensor de segundo orden por

Definición 1.8. Sea $A \in \text{Lin}^n$ se define

$$i. \quad A^k = \underbrace{AA \dots A}_{k \text{ veces}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$ii. \quad A^0 = I.$$

De la definición anterior y de (1.37) se obtienen las siguientes propiedades

$$A^k A^l = A^{k+l}, \quad (1.45)$$

$$(A^k)^l = A^{kl}, \quad (1.46)$$

$$(\alpha A)^k = \alpha^k A^k, \quad (1.47)$$

donde $k, l = 0, 1, 2, \dots, n$.

Definición 1.9. En base de la aplicación “derecha” (1.1), se puede definir también la aplicación “izquierda” a través de la siguiente condición

$$(yA) \cdot x = y \cdot (Ax), \quad \forall x \in \mathbb{E}^n, A \in \text{Lin}^n. \quad (1.48)$$

Obsérvese que $\forall y \in \mathbb{E}^n$ existe un único vector $yA \in \mathbb{E}^n$ que satisface la condición (1.48). Pues, si $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ es una base de \mathbb{E}^n y $\mathcal{F}' = \{f^1, f^2, \dots, f^n\}$ su base dual asociada. Entonces, dos vectores arbitrarios x, y de \mathbb{E}^n , se escriben como $x = x_i f^i$ y $y = y_i f^i$. Ahora, sea el vector

$$yA = y_i [f^i \cdot (A f^j)] f_j, \quad (1.49)$$

entonces $(yA) \cdot x = y_i x_j [f^i \cdot (A f^j)]$.

Por otro lado

$$y \cdot (Ax) = y \cdot (x_j A f^j) = y_i x_j [f^i \cdot (A f^j)]. \quad (1.50)$$

La unicidad del vector yA es inmediata de las propiedades del producto escalar.

Como el orden de las operaciones en (1.48) es irrelevante, se sigue la siguiente notación

$$(yA) \cdot x = y \cdot (Ax) = yAx. \quad (1.51)$$

La aplicación “izquierda” por el tensor $a \otimes b$ se obtiene de (1.48),

$$y(a \otimes b) = (y \cdot a)b, \quad \forall y \in \mathbb{E}^n. \quad (1.52)$$

Definición 1.10. El tensor transpuesto \mathbf{A}^T del tensor \mathbf{A} se define como

$$\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{x} \mathbf{A}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n. \quad (1.53)$$

De la definición anterior se puede escribir

$$\mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{y} \mathbf{A}^T \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n, \quad (1.54)$$

en efecto

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{A} \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{x}) = \mathbf{y} \mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \mathbf{A}^T), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n,$$

consecuentemente $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

La transposición representa una aplicación lineal sobre un tensor de segundo orden, pues

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T, \quad (1.55)$$

$$(\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T, \quad (1.56)$$

además

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T. \quad (1.57)$$

La relación (1.57) se puede probar como sigue

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})^T \mathbf{x} = \mathbf{x} (\mathbf{A} \mathbf{B}) = (\mathbf{x} \mathbf{A}) \mathbf{B} = \mathbf{B}^T (\mathbf{x} \mathbf{A}) = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n.$$

Las relaciones (1.55) y (1.56) se demuestran de forma análoga.

Para el producto tensorial de dos vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$, se tiene de (1.16) y (1.52)

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}. \quad (1.58)$$

Esto asegura la existencia y unicidad del tensor transpuesto. En efecto, pues cada tensor $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$ puede representarse con respecto al producto tensorial de los vectores bases en \mathbb{E}^n en la forma (1.28). Por tanto, considerando (1.58), se tiene que

$$\mathbf{A}^T = A^{ij} \mathbf{f}_j \otimes \mathbf{f}_i = A_{ij} \mathbf{f}^j \otimes \mathbf{f}^i = A^i_j \mathbf{f}^j \otimes \mathbf{f}_i = A^j_i \mathbf{f}_j \otimes \mathbf{f}^i. \quad (1.59)$$

o

$$\mathbf{A}^T = A^{ji} \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_j = A_{ji} \mathbf{f}^i \otimes \mathbf{f}^j = A^j_i \mathbf{f}^i \otimes \mathbf{f}_j = A^i_j \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^j. \quad (1.60)$$

Comparando este resultado con (1.28), las componentes del tensor transpuesto puede ser expresado como

$$\left(\mathbf{A}^T \right)_{ij} = A_{ji}, \quad \left(\mathbf{A}^T \right)^{ij} = A^{ji}, \quad \left(\mathbf{A}^T \right)^j_i = A^j_i, \quad \left(\mathbf{A}^T \right)^i_j = A^i_j. \quad (1.61)$$

La operación de transposición permite establecer la siguiente definición.

Definición 1.11. Sea $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$, entonces se dice que \mathbf{A} es simétrico si

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}. \quad (1.62)$$

Otro tipo de tensor de vital importancia en la Mecánica de Medios Continuos son los llamados tensores definidos positivos.

Definición 1.12. Sea $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$, entonces se dice que \mathbf{A} se dice definido positivo si

$$\mathbf{a} \mathbf{A} \mathbf{a} > 0, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{E}^n, \quad \mathbf{a} \neq 0. \quad (1.63)$$

Definición 1.13. Sea $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ entonces, el tensor de segundo orden $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$ se dice invertible, si existe un tensor $\mathbf{A}^{-1} \in \text{Lin}^n$ que satisface la condición

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n. \quad (1.64)$$

El tensor \mathbf{A}^{-1} se denomina inverso de \mathbf{A} . El conjunto de todos los tensores invertibles $\text{Inv}^n = \{\mathbf{A} \in \text{Lin}^n : \exists \mathbf{A}^{-1}\}$ es subconjunto de Lin^n . De (1.1) y (1.64)

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n,$$

por tanto

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (1.65)$$

Viceversa, el tensor \mathbf{A} es el inverso de \mathbf{A}^{-1} y consecuentemente

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (1.66)$$

Para la demostración considere los vectores bases \mathbf{f}_i y $\mathbf{A}\mathbf{f}_i$. Sea $\mathbf{y} = y^i \mathbf{A}\mathbf{f}_i$ un vector arbitrario en \mathbb{E}^n . Entonces como, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} = y^i \mathbf{f}_i$. Luego, $\mathbf{A}\mathbf{x} = y^i \mathbf{A}\mathbf{f}_i = \mathbf{y}$, lo que implica que el tensor \mathbf{A} es el inverso de \mathbf{A}^{-1} .

Por medio de (1.57), (1.66) y de la igualdad $\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$ se tiene que

$$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-T}. \quad (1.67)$$

Ahora, aplicando \mathbf{A}^{-1} y después \mathbf{B}^{-1} a la igualdad $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}$, se obtiene haciendo uso de (1.65)

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \quad (1.68)$$

Sobre la base de la transposición y la inversión de tensores, se define el tensor ortogonal.

Definición 1.14. Un tensor $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$ se dice ortogonal si,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-T}. \quad (1.69)$$

Estos tipos de tensores no cambian por transposiciones e inversiones consecutivas.

1.1.6 Producto escalar de tensores de segundo orden

Considere dos tensores de segundo orden $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ y $\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$. Su producto escalar se define de la siguiente forma:

Definición 1.15. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{E}^n$. Entonces se define el producto escalar de $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ y $\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$ como

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}). \quad (1.70)$$

Para dos tensores arbitrarios \mathbf{A} y \mathbf{B} dados en la forma (1.28), entonces se obtiene

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij}B^{ij} = A^{ij}B_{ij} = A_{.j}^i B_{.i}^j = A_i^j B_{.j}^i. \quad (1.71)$$

Similar a los vectores, el producto escalar de tensores es una función real caracterizada por las siguientes propiedades. Para todo $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Lin}^n$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\text{D.1 } \mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{B} : \mathbf{A},$$

$$\text{D.2 } \mathbf{A} : (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} : \mathbf{B} + \mathbf{A} : \mathbf{C},$$

$$D.3 \quad \alpha(\mathbf{A} : \mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A}) : \mathbf{B} = \mathbf{A} : (\alpha\mathbf{B}),$$

$$D.4 \quad \mathbf{A} : \mathbf{A} \geq 0 \text{ y } \mathbf{A} : \mathbf{A} = 0 \text{ si y solo si } \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Luego se puede definir la norma de un tensor de segundo orden $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$:

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}}. \quad (1.72)$$

Proposición 1.2. Sean \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} tensores de segundo orden, entonces

$$\mathbf{A} : (\mathbf{BC}) = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}) : \mathbf{C} = (\mathbf{AC}^T) : \mathbf{B}. \quad (1.73)$$

Demostración. Para el producto tensorial

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : [(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})(\mathbf{e} \otimes \mathbf{f})] = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e})[(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{f})] = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}), \quad (1.74)$$

$$[(\mathbf{c} \otimes \mathbf{c})^T (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})] : (\mathbf{e} \otimes \mathbf{f}) = [(\mathbf{d} \otimes \mathbf{c})(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})] : (\mathbf{e} \otimes \mathbf{f}) = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}), \quad (1.75)$$

$$[(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{e} \otimes \mathbf{f})^T] : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = [(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{f} \otimes \mathbf{e})] : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}). \quad (1.76)$$

Para tres tensores arbitrarios \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} dados en la forma (1.28), se puede escribir en virtud de (1.44), (1.59) y (1.71)

$$A_{.j}^i (B_{i.}^k C_{k.}^j) = (B_{i.}^k A_{.j}^i) C_{k.}^j = [(B^T)_{.i}^k A_{.j}^i] C_{k.}^j, \quad (1.77)$$

$$A_{.j}^i (B_{i.}^k C_{k.}^j) = (A_{.j}^i C_{k.}^j) B_{i.}^k = [A_{.j}^i (C^T)_{.k}^j] B_{i.}^k. \quad (1.78)$$

□

De forma similar se demuestra que

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{A}^T : \mathbf{B}^T. \quad (1.79)$$

Con ayuda del producto escalar se puede definir la traza de un tensor de segundo orden.

Definición 1.16. Sea $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$, entonces la traza del tensor \mathbf{A} se define como,

$$\text{tr} \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I}. \quad (1.80)$$

De la proposición (1.2)

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A} : \mathbf{B}^T = \mathbf{A}^T : \mathbf{B}, \quad (1.81)$$

y de (D.1) se infiere que

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA}). \quad (1.82)$$

1.1.7 Funciones tensoriales. Cálculo diferencial

Definición 1.17. La función tensorial de la variable real t , $\mathbf{A}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \text{Lin}^n$, es la función que corresponde a cada número real t un tensor $\mathbf{A}(t) \in \text{Lin}^n$.

Definición 1.18. La función tensorial $\mathbf{A}(t)$ se dice continua en t_0 si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(t_0)] = \mathbf{0}. \quad (1.83)$$

$\mathbf{A}(t)$ se dice continua cuando se tiene (1.83) para todo t real.

Definición 1.19. La función tensorial $\mathbf{A}(t)$ se dice diferenciable si existe y es finito, el siguiente límite

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t+s) - \mathbf{A}(t)}{s}, \quad (1.84)$$

el cual se denomina derivada de $\mathbf{A}(t)$.

Sea $u(t)$ una función escalar y $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b}(t)$ dos funciones vectoriales. Para funciones tensoriales diferenciables se tienen las siguientes reglas de diferenciación,

$$(i) \quad \frac{d}{dt}[u(t)\mathbf{A}(t)] = \frac{du}{dt}\mathbf{A}(t) + u(t)\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}, \quad (1.85)$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{a}(t)\mathbf{A}(t)] = \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt}\mathbf{A}(t) + \mathbf{a}(t)\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}, \quad (1.86)$$

$$(iii) \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t) : \mathbf{B}(t)] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} : \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) : \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt}, \quad (1.87)$$

$$(iv) \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{a}(t) \otimes \mathbf{b}(t)] = \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \otimes \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \otimes \frac{d\mathbf{b}(t)}{dt}, \quad (1.88)$$

$$(v) \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{B}(t)}{dt}. \quad (1.89)$$

Con el objetivo de ejemplificar como demostrar las propiedades (1.85)-(1.89), se demostrará (1.89).

Demostración. Defina dos funciones tensoriales de la siguiente forma,

$$\mathbf{M}_1(s) = \frac{\mathbf{A}(t+s) - \mathbf{A}(t)}{s} - \frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad (1.90)$$

$$\mathbf{M}_2(s) = \frac{\mathbf{B}(t+s) - \mathbf{B}(t)}{s} - \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (1.91)$$

tomando límites en (1.90) y (1.91)

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{M}_1(s) = \mathbf{0}, \quad (1.92)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{M}_2(s) = \mathbf{0}, \quad (1.93)$$

$$(1.94)$$

entonces

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t+s)\mathbf{B}(t+s) - \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)}{s} \quad (1.95)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[\left(\mathbf{A}(t) + s \frac{d\mathbf{A}}{dt} + s\mathbf{M}_1(s) \right) \left(\mathbf{B}(t) + s \frac{d\mathbf{B}}{dt} + s\mathbf{M}_2(s) \right) - \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t) \right] \quad (1.96)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{M}_1(s) \right) \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{M}_2(s) \right) + s \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{M}_1(s) \right) \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{M}_2(s) \right) \right] \quad (1.97)$$

$$= \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{B}}{dt}. \quad (1.98)$$

Luego, se tiene la igualdad (1.89). \square

1.1.8 Divergencia de un campo tensorial

Definición 1.20. Un sistema de coordenadas es una correspondencia uno a uno entre vectores del espacio euclidiano \mathbb{E}^n y un conjunto de n número reales (x_1, x_2, \dots, x_n) . A dichos números se le denominan coordenadas de los correspondientes vectores. Por tanto,

$$x^i = x^i(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (1.99)$$

donde $\mathbf{r} \in \mathbb{E}^n$ y $x^i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). De esta forma, se asume que las funciones $x^i = x^i(\mathbf{r})$ y $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ son suficientemente diferenciables.

Considere un sistema de coordenadas curvilíneo arbitrario

$$\theta^i = \theta^i(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n), \quad (1.100)$$

donde $\mathbf{r} \in \mathbb{E}^n$ y $\theta^i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Sean $u = u(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n)$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n)$ y $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n)$ una función escalar, vectorial y tensorial, respectivamente, diferenciables de las coordenadas $\theta^i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Tales funciones son generalmente conocidas como campo escalar, campo vectorial y campo tensorial, respectivamente. Debido a la correspondencia uno a uno (1.99) tales campos pueden ser representados como: $u = u(\mathbf{r})$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Definición 1.21. Se define la divergencia de un campo tensorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ de la siguiente forma

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_A \mathbf{A} n dA = \mathbf{A}_{,i} \mathbf{f}^i, \quad (1.101)$$

donde $\mathbf{A}_{,i} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta^i}$. La integración se lleva a cabo sobre una superficie cerrada de área A con volumen V y vector normal unitario \mathbf{n} .

Sea $u = u(\mathbf{r})$ un campo escalar; $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{r})$ campos vectoriales y $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ un campo tensorial. Entonces se tienen las siguientes identidades,

$$\nabla \cdot (u\mathbf{a}) = u\nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla u, \quad (1.102)$$

$$\nabla \cdot (u\mathbf{A}) = u\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \nabla u, \quad (1.103)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{a}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{A} : \nabla \mathbf{a}, \quad (1.104)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\nabla \mathbf{a}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b} \quad (1.105)$$

1.1.9 Derivadas de funciones escalares tensoriales

Considérese una función escalar tensorial

$$f(\mathbf{A}) : \text{Lin}^n \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.106)$$

Definición 1.22. La función (1.106) se dice diferenciable en una vecindad de \mathbf{A} si existe un tensor $f(\mathbf{A}),_{\mathbf{A}} \in \text{Lin}^n$ tal que

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{A} + t\mathbf{X})|_{t=0} = f(\mathbf{A}),_{\mathbf{A}} : \mathbf{X}, \quad \forall \mathbf{X} \in \text{Lin}^n, \quad (1.107)$$

el tensor $f(\mathbf{A}),_{\mathbf{A}}$ se conoce como la derivada de la función (1.106).

Obsérvese que de (1.107), siendo \mathbf{A} elemento de Lin^n y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se tienen las siguientes igualdades

$$[f(\mathbf{A}) + g(\mathbf{A})],_{\mathbf{A}} = f(\mathbf{A}),_{\mathbf{A}} + g(\mathbf{A}),_{\mathbf{A}}, \quad (1.108)$$

$$[\alpha f(\mathbf{A})],_{\mathbf{A}} = \alpha f(\mathbf{A}),_{\mathbf{A}}, \quad (1.109)$$

donde f, g son funciones escalares tensoriales diferenciables en una vecindad de \mathbf{A} . La relación (1.108) se demuestra como sigue:

$$[(f + g)(\mathbf{A})],_{\mathbf{A}} : \mathbf{X} = \frac{d}{dt} [(f + g)(\mathbf{A} + t\mathbf{X})]|_{t=0} = \frac{d}{dt} [f(\mathbf{A} + t\mathbf{X})]|_{t=0} + \frac{d}{dt} [g(\mathbf{A} + t\mathbf{X})]|_{t=0} = \quad (1.110)$$

$$= f(\mathbf{A}),_{\mathbf{A}} : \mathbf{X} + g(\mathbf{A}),_{\mathbf{A}} : \mathbf{X} = [f(\mathbf{A}),_{\mathbf{A}} + g(\mathbf{A}),_{\mathbf{A}}] : \mathbf{X}, \quad (1.111)$$

para todo $\mathbf{X} \in \text{Lin}^n$. La demostración de (1.109) se realiza de forma similar.

Definición 1.23. Los invariantes principales de un tensor $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$ son

$$I_{\mathbf{A}} = I_{\mathbf{A}}^{(1)} = \text{tr} \mathbf{A}, \quad (1.112)$$

$$II_{\mathbf{A}} = I_{\mathbf{A}}^{(2)} = \frac{1}{2}[(\text{tr} \mathbf{A})^2 - \text{tr} \mathbf{A}^2], \quad (1.113)$$

$$III_{\mathbf{A}} = I_{\mathbf{A}}^{(3)} = \frac{1}{3}[\text{tr} \mathbf{A}^3 - \frac{3}{2} \text{tr} \mathbf{A}^2 \text{tr} \mathbf{A} + \frac{1}{2} (\text{tr} \mathbf{A})^3] = \det \mathbf{A}. \quad (1.114)$$

Definición 1.24. Sea $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$ un tensor de segundo orden. El número $\lambda \in \mathbb{C}$ se denomina **valor propio** de \mathbf{A} si

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \neq 0. \quad (1.115)$$

El vector no nulo $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$ se denomina **vector propio** de \mathbf{A} .

Se tiene el siguiente teorema, cuya demostración se omite (el lector interesado puede referirse al libro Istkov [26])

Teorema 1.2 (Cayley-Hamilton). Sea

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} I_{\mathbf{A}}^{(1)} + \dots + (-1)^{n-k} \lambda^{n-k} I_{\mathbf{A}}^{(k)} + \dots + I_{\mathbf{A}}^{(n)},$$

el polinomio característico de un tensor de segundo orden \mathbf{A} . Donde

$$I_{\mathbf{A}}^{(k)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} I_{\mathbf{A}}^{(k-i)} \text{tr} \mathbf{A}^i, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.116)$$

$$I_{\mathbf{A}}^{(n)} = \det \mathbf{A}. \quad (1.117)$$

Entonces,

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} I_{\mathbf{A}}^{(k)} \mathbf{A}^{n-k} = \mathbf{0}. \quad (1.118)$$

Proposición 1.3. Sea $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$. Entonces

$$\text{tr} \mathbf{A}^k, \mathbf{A} = k(\mathbf{A}^{k-1})^T. \quad (1.119)$$

Demostración. Sea $\mathbf{X} \in \text{Lin}^n$ fijo arbitrario, entonces

$$\frac{d}{dt} [\text{tr}(\mathbf{A} + t\mathbf{X})^k] \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} [(\mathbf{A} + t\mathbf{X})^k : \mathbf{I}] \Big|_{t=0} \quad (1.120)$$

$$= \frac{d}{dt} [(\mathbf{A} + t\mathbf{X})^k] \Big|_{t=0} : \mathbf{I} \quad (1.121)$$

$$= \frac{d}{dt} \underbrace{[(\mathbf{A} + t\mathbf{X})(\mathbf{A} + t\mathbf{X}) \dots (\mathbf{A} + t\mathbf{X})]}_{k \text{ veces}} \Big|_{t=0} : \mathbf{I} \quad (1.122)$$

$$= \frac{d}{dt} [\mathbf{A}^k + t \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^i \mathbf{X} \mathbf{A}^{k-1-i} + t^2 \dots] \Big|_{t=0} : \mathbf{I} \quad (1.123)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^i \mathbf{X} \mathbf{A}^{k-1-i} : \mathbf{I}. \quad (1.124)$$

Denotando por $\mathbf{A} = \mathbf{X} \mathbf{A}^{k-1-i}$, $\mathbf{B}^T = \mathbf{A}^i$, $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ y usando la proposición 1.2,

$$\frac{d}{dt} [\text{tr}(\mathbf{A} + t\mathbf{X})^k] \Big|_{t=0} = \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{A}^i)^T : \mathbf{X} \mathbf{A}^{k-1-i}. \quad (1.125)$$

Asumiendo ahora que $\mathbf{A} = \mathbf{X}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{A}^i)^T$, $\mathbf{C}^T = \mathbf{A}^{k-1-i}$ y usando nuevamente la proposición 1.2, se tiene que

$$\frac{d}{dt} [\text{tr}(\mathbf{A} + t\mathbf{X})^k] \Big|_{t=0} = \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{A}^i)^T (\mathbf{A}^{k-1-i})^T : \mathbf{X} \quad (1.126)$$

$$= k(\mathbf{A}^{k-1})^T : \mathbf{X}. \quad (1.127)$$

Luego, como la igualdad anterior se cumple para todo $\mathbf{X} \in \text{Lin}^n$,

$$(\text{tr} \mathbf{A}^k),_{\mathbf{A}} = k(\mathbf{A}^{k-1})^T. \quad (1.128)$$

□

Proposición 1.4. Sea $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$. Entonces

$$\left(I_{\mathbf{A}}^{(1)}\right),_{\mathbf{A}} = \mathbf{I}, \quad (1.129)$$

$$\left(I_{\mathbf{A}}^{(2)}\right),_{\mathbf{A}} = I_{\mathbf{A}}^{(1)} \mathbf{I} - \mathbf{A}^T, \quad (1.130)$$

$$\left(I_{\mathbf{A}}^{(3)}\right),_{\mathbf{A}} = I_{\mathbf{A}}^{(2)} \mathbf{I} - I_{\mathbf{A}}^{(1)} \mathbf{A}^T + (\mathbf{A}^2)^T, \quad (1.131)$$

para tensores inversibles (1.131) toma la forma

$$\left(I_{\mathbf{A}}^{(3)}\right),_{\mathbf{A}} = I_{\mathbf{A}}^{(3)} \mathbf{A}^{-T}. \quad (1.132)$$

Demostración. De la proposición (1.3) se tiene directamente que

$$\left(I_{\mathbf{A}}^{(1)}\right),_{\mathbf{A}} = \mathbf{I}. \quad (1.133)$$

Ahora,

$$\left(I_{\mathbf{A}}^{(2)}\right),_{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}[(\text{tr} \mathbf{A})^2 - \text{tr} \mathbf{A}^2],_{\mathbf{A}} \quad (1.134)$$

$$= \frac{1}{2}[2\text{tr} \mathbf{A}(\text{tr} \mathbf{A}),_{\mathbf{A}} + \text{tr}(\mathbf{A}^2),_{\mathbf{A}}] \quad (1.135)$$

$$= (\text{tr} \mathbf{A}) \mathbf{I} - \mathbf{A}^T. \quad (1.136)$$

Luego

$$(I_2(\mathbf{A})),_{\mathbf{A}} = I_{\mathbf{A}}^{(1)} \mathbf{I} - \mathbf{A}^T. \quad (1.137)$$

Antes de pasar al cálculo de $\left(I_{\mathbf{A}}^{(3)}\right),_{\mathbf{A}}$, nótese que

$$I_{\mathbf{A}}^{(3)} = \frac{1}{3}[\text{tr} \mathbf{A}^3 - \frac{3}{2}\text{tr} \mathbf{A}^2 \text{tr} \mathbf{A} + \frac{1}{2}(\text{tr} \mathbf{A})^3] \quad (1.138)$$

$$= \frac{1}{3}[\text{tr} \mathbf{A}^3 - \text{tr} \mathbf{A} \text{tr} \mathbf{A}^2 + \frac{1}{2}((\text{tr} \mathbf{A})^2 - \text{tr} \mathbf{A}^2) \text{tr} \mathbf{A}] \quad (1.139)$$

$$= \frac{1}{3}[\text{tr} \mathbf{A}^3 - I_{\mathbf{A}}^{(1)} \text{tr} \mathbf{A}^2 + I_{\mathbf{A}}^{(2)} \text{tr} \mathbf{A}]. \quad (1.140)$$

Luego, utilizando los resultados anteriores se tiene que

$$\left(I_{\mathbf{A}}^{(3)}\right),_{\mathbf{A}} = \frac{1}{3}[\text{tr} \mathbf{A}^3 - I_{\mathbf{A}}^{(1)} \text{tr} \mathbf{A}^2 + I_{\mathbf{A}}^{(2)} \text{tr} \mathbf{A}],_{\mathbf{A}} \quad (1.141)$$

$$= \frac{1}{3}[\text{tr} \mathbf{A}^3],_{\mathbf{A}} - \frac{1}{3}[I_{\mathbf{A}}^{(1)} \text{tr} \mathbf{A}^2],_{\mathbf{A}} + \frac{1}{3}[I_{\mathbf{A}}^{(2)} \text{tr} \mathbf{A}],_{\mathbf{A}} \quad (1.142)$$

$$= \frac{1}{2}[(\text{tr} \mathbf{A})^2 - \text{tr} \mathbf{A}^2] \mathbf{I} - (\text{tr} \mathbf{A}) \mathbf{A}^T + (\mathbf{A}^2)^T \quad (1.143)$$

$$= I_{\mathbf{A}}^{(2)} \mathbf{I} - I_{\mathbf{A}}^{(1)} \mathbf{A}^T + (\mathbf{A}^2)^T. \quad (1.144)$$

Si se supone que \mathbf{A} es inversible y del teorema de Cayley-Hamilton, se tiene que

$$\left(I_{\mathbf{A}}^{(3)}\right),_{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T = I_{\mathbf{A}}^{(2)} \mathbf{A}^T - I_{\mathbf{A}}^{(1)} (\mathbf{A}^T)^2 + (\mathbf{A}^T)^3 \quad (1.145)$$

$$= I_{\mathbf{A}}^{(3)} \mathbf{I}. \quad (1.146)$$

Por tanto

$$\left(I_{\mathbf{A}}^{(3)}\right), \mathbf{A} = I_{\mathbf{A}}^{(3)} \mathbf{A}^{-T}. \quad (1.147)$$

□

De especial interés resulta conocer la derivada de la función compuesta $f(\mathbf{A}(t))$.

Proposición 1.5. *Considérese una función escalar tensorial $f(\mathbf{A}) : \text{Lin}^n \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ es una función tensorial diferenciable de la variable real t , entonces*

$$\frac{df(\mathbf{A}(t))}{dt} = f, \mathbf{A} : \frac{d\mathbf{A}}{dt}. \quad (1.148)$$

Demostración. Usando (1.90)

$$\frac{df}{dt} = \frac{df(\mathbf{A}(t+s))}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{df\left(\mathbf{A}(t) + s \frac{d\mathbf{A}}{dt} + s \mathbf{M}(s)\right)}{ds} \Big|_{s=0}. \quad (1.149)$$

Introduciendo las funciones auxiliares $s_1(s) = s$, $s_2(s) = s$ y aplicando la relación (1.107)

$$\frac{df}{dt} = \frac{df\left(\mathbf{A}(t) + s_1 \frac{d\mathbf{A}}{dt} + s_1 \mathbf{M}(s_2)\right)}{ds} \Big|_{s=0} \quad (1.150)$$

$$= \frac{\partial f\left(\mathbf{A}(t) + s_1 \frac{d\mathbf{A}}{dt} + s_1 \mathbf{M}(s_2)\right)}{\partial s_1} \frac{ds_1}{ds} \Big|_{s=0} + \frac{\partial f\left(\mathbf{A}(t) + s_1 \frac{d\mathbf{A}}{dt} + s_1 \mathbf{M}(s_2)\right)}{\partial s_2} \frac{ds_2}{ds} \Big|_{s=0} \quad (1.151)$$

$$= f, \mathbf{A} : \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{M}(s_2) \right] \Big|_{s_2=0} + \frac{\partial f\left(\mathbf{A}(t) + s_1 \frac{d\mathbf{A}}{dt} + s_1 \mathbf{M}(s_2)\right)}{\partial s_2} \Big|_{s_1=s_2=0} \quad (1.152)$$

$$= f, \mathbf{A} : \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{\partial f(\mathbf{A}(t))}{\partial s_2} \Big|_{s_2=0}. \quad (1.153)$$

Luego se ha obtenido

$$\frac{df(\mathbf{A}(t))}{dt} = f, \mathbf{A} : \frac{d\mathbf{A}}{dt}. \quad (1.154)$$

□

1.2 Cinemática

En el mundo real todo objeto físico está compuesto de moléculas. Los estudios microscópicos son efectivos a nivel atómico y muy importantes en la exploración de una variedad de fenómenos físicos. El punto de vista atomístico, sin embargo, no es un acercamiento útil y adecuado para ciertas aplicaciones. El presente trabajo se basa en la Mecánica de Medios Continuos, la cual constituye una herramienta poderosa y efectiva, a la hora de explicar de manera satisfactoria varios fenómenos físicos sin el conocimiento detallado de la microestructura interna. Por supuesto, las predicciones basadas en estudios macroscópicos no son exactas, pero son lo suficientemente buenas como para comprender el fenómeno en estudio. La Mecánica de Medios Continuos comprende de manera general: el estudio del movimiento y la deformación (cinemática), el estudio de tensión y la descripción matemática de las leyes fundamentales de la física que gobiernan el movimiento de un cuerpo continuo (principios de balance). El objetivo del presente capítulo, consiste en derivar algunas de las ecuaciones esenciales dentro de los tres campos antes mencionados. Note que los resultados que se presentarán son válidos para toda clase de material.

1.2.1 Configuraciones y movimiento de un cuerpo continuo

Los sistemas macroscópicos se pueden describir a través de un acercamiento continuo (acercamiento macroscópico). Lo cual conduce a la teoría de medios continuos. Una suposición fundamental de la teoría de medios continuos manifiesta que un cuerpo, denotado por \mathcal{B} , puede ser interpretado como una distribución de materia continua (o al menos continua por pedazos) en tiempo y espacio. El cuerpo se asume como la composición de un conjunto (continuo) de partículas (o partículas continuas o puntos materiales), representado por $P \in \mathcal{B}$ como se indica en la Fig. 1.1.

Es importante notar que la noción de “partícula” (o “partícula continua” o “punto material”) se refiere a una parte del cuerpo. Una partícula continua se refiere a una acumulación de un gran número de partículas, siendo lo suficiente pequeña como para ser considerada como una partícula. El comportamiento de una partícula continua es consecuencia del comportamiento colectivo de todas las moléculas que constituyen dicha partícula. Por tanto, en un estudio macroscópico interesa la mecánica de un cuerpo en que ambas, masa y volumen, son funciones continuas (o al menos continuas a trozos) de partículas continuas. Tal cuerpo se denomina **cuerpo continuo**. Un cuerpo continuo está determinado por **cantidades macroscópicas**.

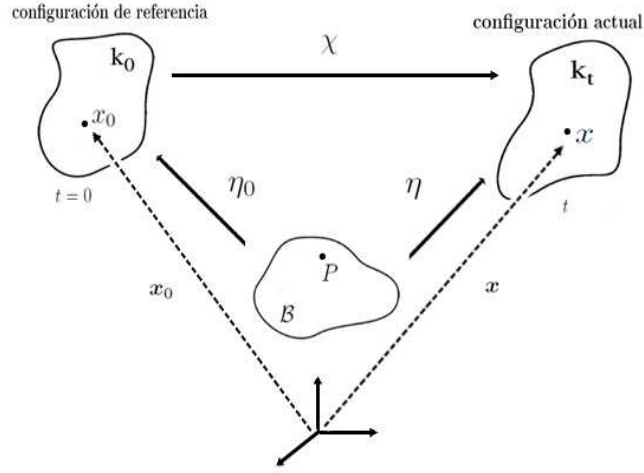


Figura 1.1: Configuración y movimiento de un cuerpo continuo.

1.2.1.1 Configuración

Considérese un cuerpo continuo \mathcal{B} con partícula $P \in \mathcal{B}$ en \mathbb{R}^3 en un momento dado t , como se indica en la Fig. 1.1. A medida que el cuerpo \mathcal{B} se mueve en el espacio desde un instante de tiempo a otro, ocupa una secuencia continua de regiones geométricas denotadas por $\kappa_0, \dots, \kappa_t$.

Definición 1.25. Las regiones ocupadas por el cuerpo \mathcal{B} en un momento de tiempo t se denominan **configuraciones de \mathcal{B} en el momento t** .

El cuerpo continuo \mathcal{B} puede tener infinitas configuraciones en el espacio. Las regiones geométricas están determinadas de forma única en cada instante de tiempo.

Definición 1.26. La región κ_0 , representa la **configuración de referencia, inicial o sin deformación del cuerpo \mathcal{B}** .

Ahora, el punto x_0 posee la posición de una partícula $P \in \mathcal{B}$ en el momento $t = 0$, y entonces P puede ser identificado por el **vector de posición** (o **posición de referencia**) x_0 del punto x_0 relativo al origen

fijo O . Si se supone que la región del espacio κ_0 se mueve a una nueva región κ_t , la cual es ocupada por el cuerpo continuo \mathcal{B} en el instante $t > 0$; se tiene la siguiente definición.

Definición 1.27. La configuración de \mathcal{B} en el instante t se denomina **configuración actual** (o **deformada**).

Se relaciona un punto x_0 de la configuración de referencia con un punto x de la configuración actual, ocupado por una partícula $P \in \mathcal{B}$ en los instantes $t = 0$ y $t > 0$, respectivamente y el **vector de posición** (o **posición actual**) \mathbf{x} sirve de etiqueta para el punto asociado x respecto al origen fijo O .

Definición 1.28. Se llama a x_0 , **punto x_0 asociado a la partícula $P \in \mathcal{B}$ en el instante $t = 0$** y a x , **punto x asociado a la partícula $P \in \mathcal{B}$ en el instante $t > 0$** .

Las componentes de los vectores $\mathbf{x}_0 = x_{i0}\mathbf{e}_{i0}$ y $\mathbf{x} = x_j\mathbf{e}_j$ se consideran que poseen la misma dirección de los ejes introducidos. Denotamos por $x_{i0}, i = 1, 2, 3$ a las **coordenadas materiales** (o **de referencia**) del punto x_0 y por $x_j, j = 1, 2, 3$ a las **coordenadas espaciales** (o **actuales**) del punto x . Se ha asumido que los orígenes de los vectores bases $\{\mathbf{e}_{i0}\}$ y $\{\mathbf{e}_j\}$ coinciden y además que las configuraciones de referencia y actual poseen el mismo sistema de coordenadas. Dando lugar a que las bases $\{\mathbf{e}_{i0}\}$ y $\{\mathbf{e}_j\}$, sean idénticas. De lo anterior, en lo que sigue solo se usará la base $\{\mathbf{e}_j\}$.

1.2.1.2 Movimiento

Se asume que la aplicación $\mathbf{x}_0 = \eta_0(P, t)$, es una correspondencia uno a uno entre un punto material $P \in \mathcal{B}$ y el punto $\mathbf{x}_0 \in \kappa_0$ que ocupa \mathcal{B} en el instante $t = 0$ (ver Fig. 1.1). Además, sea la aplicación η actuando sobre \mathcal{B} y que genera la región κ_t en el instante t . El lugar $\mathbf{x} = \eta(P, t)$ que la partícula P ocupa en el instante t , se describe de la siguiente forma:

$$\mathbf{x} = \eta[\eta_0^{-1}(\mathbf{x}_0, t)] = \chi(\mathbf{x}_0, t), \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \kappa_0 \text{ y } \forall t. \quad (1.155)$$

Definición 1.29. En (1.155), χ representa un campo vectorial que determina el lugar \mathbf{x} de \mathbf{x}_0 , para todo t fijo, y se denomina **movimiento** del cuerpo \mathcal{B} .

El movimiento χ transforma los puntos $\mathbf{x}_0 \in \kappa_0$ en puntos \mathbf{x} de la configuración actual. Se asume, además, que χ posee derivadas continuas respecto al tiempo y al espacio. La ecuación (1.155), determina las posiciones sucesivas \mathbf{x} de una partícula P en el espacio, todas estas posiciones forman una curva en el espacio euclidiano, la cual se denomina **trayectoria** de la partícula P .

El movimiento χ se asume que es invertible. Luego se tiene la siguiente definición.

Definición 1.30. La posición de un punto \mathbf{x}_0 , el cual es asociado con el lugar \mathbf{x} en el momento t , se especifica unívocamente como,

$$\mathbf{x}_0 = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t), \quad (1.156)$$

con el **movimiento inverso** denotado por χ^{-1} , es decir, la inversa de la aplicación χ .

Para un tiempo dado t , el movimiento inverso (1.156) lleva puntos de κ_t a la configuración de referencia κ_0 . Un movimiento χ de un cuerpo, generalmente cambia la forma, la posición y la orientación del mismo.

Definición 1.31. Un cuerpo continuo que es capaz de cambiar su forma se denomina **deformable**.

Definición 1.32. La **deformación** χ (o **deformación inversa** χ^{-1}) de un cuerpo, se entiende como el movimiento (o movimiento inverso) del cuerpo que es independiente del tiempo.

También, se asume que χ^{-1} posee derivadas continuas respecto al tiempo y al espacio, luego χ es un difeomorfismo. La descripción material (o de referencia) es una caracterización del movimiento (o cualquier otra cantidad), con respecto a las coordenadas materiales de \mathbf{x}_0 y al momento de tiempo t , dado por (1.155). En la descripción material se presta atención a una partícula, y se observa la evolución de dicha

partícula en su movimiento. Tradicionalmente la descripción material se conoce como descripción Lagrangiana (o forma lagrangiana). La llamada descripción Euleriana (o espacial), es una caracterización del movimiento (o cualquier otra cantidad), con respecto a las coordenadas espaciales de \mathbf{x} y al instante de tiempo t , dada por (1.156). En la descripción espacial se presta atención a un punto del espacio, y se observa la evolución del punto según varía el tiempo t . En mecánica de sólidos se usan ambos tipos de descripciones. Debido al hecho que el comportamiento constitutivo de sólidos es a menudo dado en términos de coordenadas materiales, a menudo se prefiere la descripción Lagrangiana.

1.2.2 Campo de desplazamiento, de velocidad y de aceleración

1.2.2.1 Campo de desplazamiento

Definición 1.33. *El campo vectorial*

$$\mathbf{d}_0(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{x}_0, \quad (1.157)$$

representa el campo de desplazamiento de una partícula.

Dicho campo relaciona la posición \mathbf{x}_0 en la configuración sin deformar con la posición \mathbf{x} en la configuración deformada. La relación (1.157) se mantiene válida para todas las partículas. El campo de desplazamiento \mathbf{d}_0 , es una función de la posición de referencia \mathbf{x}_0 y el tiempo t , la cual caracteriza la descripción material (forma Lagrangiana) del campo de desplazamiento.

Definición 1.34. *El campo de desplazamiento en la descripción espacial (forma Euleriana), denotada por \mathbf{d} , es una función de la posición actual \mathbf{x} y el tiempo t y se define por,*

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t). \quad (1.158)$$

La representación (1.158) especifica la posición actual \mathbf{x} de una partícula en el momento t , la cual resulta de su posición de referencia \mathbf{x}_0 más su desplazamiento $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ desde esta posición. Por otro lado, (1.157) expresa el desplazamiento de una partícula en el momento t en términos de su posición de referencia \mathbf{x}_0 .

Las dos descripciones están relacionadas en términos del movimiento $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}_0, t)$, de la siguiente forma

$$\mathbf{d}_0(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{d}_0(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{d}(\mathbf{x}, t). \quad (1.159)$$

Note que \mathbf{d}_0 y \mathbf{d} tienen los mismos valores y representan funciones de diferentes argumentos. Producto de que la configuración inicial coincide con la configuración de referencia, no hay desplazamientos en dicha configuración. Además, para una traslación de cuerpo rígido cualquier partícula se mueve una misma distancia, con misma magnitud y misma dirección en el instante t , luego para este caso el campo de desplazamiento es independiente de \mathbf{x}_0 .

1.2.2.2 Campo de velocidad y de aceleración

En la mecánica de sólidos el movimiento y la deformación de un cuerpo continuo son, en general, descritos en términos del campo de desplazamiento. Sin embargo, en la mecánica de fluidos, los campos principales que describen las propiedades cinemáticas fundamentales son el **campo de velocidad** y el **campo de aceleración**.

Definición 1.35. *Aplicando primera y segunda derivada respecto a t al movimiento χ manteniendo \mathbf{x}_0 fijo, se obtiene*

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \chi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t}, \quad (1.160)$$

$$\mathbf{a}_0(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \chi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t^2}, \quad (1.161)$$

donde $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t)$ y $\mathbf{a}_0(\mathbf{x}_0, t)$ denotan la **descripción material** del campo de velocidad y de aceleración, respectivamente.

Las relaciones (1.160) y (1.161), representan dos funciones de las coordenadas materiales (x_{10}, x_{20}, x_{30}) y del tiempo t y describen la razón de cambio de la posición y la velocidad de una partícula \mathbf{x}_0 en el momento t .

Ahora, se hace necesario definir estos dos campos en la descripción espacial. Con tal objetivo se toma la inversa del movimiento χ .

Definición 1.36. Los campos $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ denotan la **descripción espacial del campo de velocidad y de aceleración**, respectivamente y se definen a partir de (1.160) y (1.161) de la siguiente forma

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{v}_0(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (1.162)$$

$$\mathbf{a}_0(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{a}_0(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t). \quad (1.163)$$

1.2.3 Derivadas materiales y espaciales

Se introduce la terminología de **campo material** en el cual las variables independientes son (\mathbf{x}_0, t) , es decir, la posición de referencia \mathbf{x}_0 con coordenadas materiales x_{i0} , $i = 1, 2, 3$ y el tiempo t . Por otro lado, en un **campo espacial** las variables independientes son (\mathbf{x}, t) , es decir, la posición actual \mathbf{x} con coordenadas espaciales x_j , $j = 1, 2, 3$ y el tiempo t .

En lo que sigue se denota por $f_0 = f_0(\mathbf{x}_0, t)$ y $f = f(\mathbf{x}, t)$, a un campo material suave y un campo espacial suave, respectivamente de alguna cantidad escalar, vectorial o tensorial asociados al movimiento χ .

1.2.3.1 Derivada material de un campo material

Definición 1.37. Se denota por $Df_0(\mathbf{x}_0, t)/Dt$ o por $\dot{f}_0(\mathbf{x}_0, t)$ a la **derivada material** de un campo material suave $f_0(\mathbf{x}_0, t)$. Esta es la derivada de f_0 respecto a t (manteniendo \mathbf{x}_0 fijo), es decir,

$$\dot{f}_0(\mathbf{x}_0, t) = \frac{Df_0(\mathbf{x}_0, t)}{Dt} = \left(\frac{\partial f_0(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_0}, \quad (1.164)$$

donde el subíndice \mathbf{x}_0 , indica la variable que se queda fija.

En virtud de (1.155), (1.157), (1.160) y (1.161), se obtiene que

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{d}_0(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{d}}_0, \quad (1.165)$$

$$\mathbf{a}_0(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{v}}_0, \quad (1.166)$$

y por tanto

$$\mathbf{a}_0 = \dot{\mathbf{v}}_0 = \ddot{\mathbf{d}}_0. \quad (1.167)$$

Debido a la terminología definida al comienzo de la presente sección, $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t)$ y $\mathbf{a}_0(\mathbf{x}_0, t)$ denotan el **campo material de velocidad** y el **campo material de aceleración**, respectivamente.

Definición 1.38. El **gradiente material** de un campo material suave $f_0(\mathbf{x}_0, t)$, se denota por $\nabla_{\mathbf{x}_0} f_0(\mathbf{x}_0, t)$ y se obtiene derivando f_0 respecto a la posición de referencia \mathbf{x}_0 , en el momento fijo t , es decir,

$$\nabla_{\mathbf{x}_0} f_0(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial f_0(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0}. \quad (1.168)$$

1.2.3.2 Derivada espacial de un campo espacial

Definición 1.39. La **derivada espacial** de un campo espacial suave $f(\mathbf{x}, t)$ es la derivada de f respecto al tiempo t manteniendo la posición actual \mathbf{x} fija. Esta se denota simplemente por

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \quad (1.169)$$

Definición 1.40. El **gradiente espacial** de f , denotado por $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t)$, se obtiene derivando f respecto a la posición actual \mathbf{x} , en el momento fijo t , es decir,

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}. \quad (1.170)$$

1.2.3.3 Derivada material de un campo espacial

Definición 1.41. La derivada material de un campo espacial suave $f(\mathbf{x}, t)$, la cual se denota por $Df(\mathbf{x}, t)/Dt$ o $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$, es la derivada de f respecto al tiempo t manteniendo \mathbf{x}_0 fijo.

Con el objetivo de evaluar \dot{f} , primero se describe a f respecto a la descripción material, después se toma derivada material y finalmente se vuelve a través del movimiento χ a la descripción espacial, es decir,

$$\dot{f}(\mathbf{x}, t) = \frac{Df(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \left(\frac{\partial f(\chi(\mathbf{x}_0, t), t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_0 = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)}. \quad (1.171)$$

Sea ϕ un campo espacial suave, el cual asigna un escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$ a cada punto \mathbf{x} en el instante t . Usando la regla de la cadena y (1.171)

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right)_t \cdot \left(\frac{\partial \chi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_0 = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)}, \quad (1.172)$$

teniendo en cuenta (1.160) y (1.162),

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{D\phi(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (1.173)$$

o en la forma equivalente

$$\dot{\phi} = \frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} v_i. \quad (1.174)$$

Observe que el primer término de la parte derecha de (1.173) denota la derivada espacial del campo escalar espacial ϕ .

Definición 1.42. El segundo término de (1.173) se denomina **razón de cambio convectiva** de ϕ , y describe el cambio de posición de una partícula.

Por analogía, la derivada material de un campo espacial suave $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, está dada por

$$\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \frac{D\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (1.175)$$

es decir,

$$\dot{v}_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j, \quad (1.176)$$

donde $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ y su derivada material $\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$, pueden ser vistos, como la descripción espacial del campo de velocidad y de aceleración, o más breve, el **campo de velocidad espacial** y el **campo de aceleración espacial**, respectivamente.

Las relaciones (1.175) y (1.176) pueden ser reescritas de la siguiente forma,

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{x} \mathbf{v}) \mathbf{v}, \quad (1.177)$$

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j, \quad (1.178)$$

respectivamente.

Definición 1.43. Al primer término de la parte derecha de (1.177) se le conoce como **aceleración local** y al segundo **campo de aceleración convectivo**.

Las relaciones (1.177) y (1.178) resultan útiles, dado que el campo de aceleración espacial $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ puede ser determinado a partir de $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ sin necesidad de conocer explícitamente el movimiento.

En virtud de (1.160) y (1.162), el campo de velocidad espacial $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ puede ser expresado como la derivada material del movimiento $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}_0, t)$, es decir,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}, \quad (1.179)$$

y de (1.157), se deduce que $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{d}}$. El campo de aceleración espacial por analogía con (1.167) es,

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{d}}. \quad (1.180)$$

1.2.4 Gradiente de deformación

En Mecánica, es importante estudiar la deformación (los cambios de tamaño y forma) de un cuerpo continuo cuando se mueve de la configuración de referencia κ_0 a cierta configuración actual κ_t . Como se sabe un punto $x_0 \in \kappa_0$ identificado por el vector de posición \mathbf{x}_0 se corresponde con un punto $x \in \kappa_t$ con vector de posición \mathbf{x} . Ahora, se quiere conocer como en este movimiento las curvas y los vectores tangentes se deforman.

Considere una **curva material** (o **sin deformar**) $x_0 = \Gamma(\xi) \subset \kappa_0$, donde ξ es un parámetro (véase Fig. 1.2). La curva material está asociada a la configuración de referencia κ_0 del cuerpo continuo. Por tanto, la curva material no es función del tiempo. Durante cierto movimiento χ la curva material se deforma en una **curva espacial** (o **deformada**), $x = \gamma(\xi, t) \subset \kappa_t$, en el instante t .

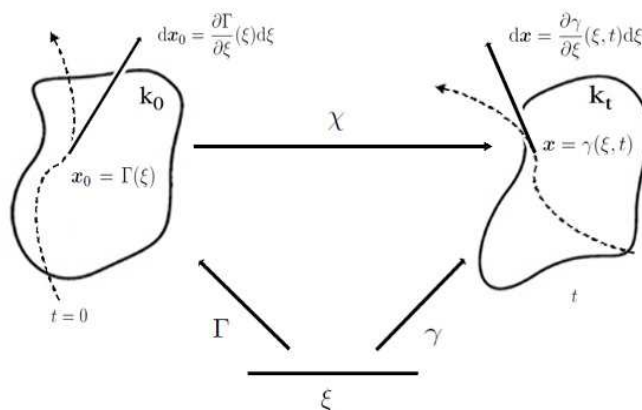


Figura 1.2: Deformación de una curva material $\Gamma \subset \kappa_0$ en una curva espacial $\gamma \subset \kappa_t$.

Definición 1.44. La curva espacial en el instante de tiempo t fijo, es entonces definida por la ecuación paramétrica,

$$\mathbf{x} = \gamma(\xi, t) = \chi(\Gamma(\xi), t). \quad (1.181)$$

Definición 1.45. Se denota al **vector espacial tangente** a la curva espacial por $d\mathbf{x}$ y al **vector material tangente** a la curva material por $d\mathbf{x}_0$ y se definen por

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \gamma}{\partial \xi}(\xi, t) d\xi, \quad (1.182)$$

$$d\mathbf{x}_0 = \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}(\xi) d\xi. \quad (1.183)$$

En la literatura los vectores tangentes $d\mathbf{x}$ y $d\mathbf{x}_0$, se conocen como el **elemento de línea espacial** (o **deformado**) y el **elemento de línea material** (o **sin deformar**), respectivamente.

Usando la ecuación (1.181) y la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{\partial \gamma(\xi, t)}{\partial \xi} = \frac{\partial \chi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial \Gamma(\xi)}{\partial \xi}. \quad (1.184)$$

Definición 1.46. El tensor de segundo orden \mathbf{F} definido por la relación

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \chi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} = \nabla_{\mathbf{x}_0} \chi(\mathbf{x}_0, t), \quad (1.185)$$

se denomina **gradiente de deformación**.

Luego haciendo uso de las ecuaciones (1.182) y (1.183), se deduce la relación

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, t) d\mathbf{x}_0. \quad (1.186)$$

La cantidad \mathbf{F} es crucial en la mecánica no lineal de medios continuos y es una medida de la deformación. La expresión (1.186) define una transformación lineal la cual genera un vector $d\mathbf{x}$ por la acción del tensor de segundo orden \mathbf{F} sobre el vector $d\mathbf{x}_0$, es decir, vectores tangentes materiales se transforman en vectores tangentes espaciales a través del gradiente de deformación.

Se asume que la derivada del movimiento inverso χ^{-1} respecto a la posición actual \mathbf{x} de un punto material existe, de modo que

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}_0} \chi_0(\mathbf{x}, t), \quad (1.187)$$

donde el tensor \mathbf{F}^{-1} es el inverso del gradiente de deformación y transforma el elemento de línea espacial $d\mathbf{x}$ en el elemento de línea material $d\mathbf{x}_0$, de acuerdo a la transformación lineal,

$$d\mathbf{x}_0 = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (1.188)$$

Definición 1.47. Generalmente el tensor invertible \mathbf{F} depende de \mathbf{x}_0 , el cual define una **deformación no homogénea**. Por otro lado, la deformación de un cuerpo se dice **homogénea** si \mathbf{F} no depende del espacio de coordenadas.

Sean los elementos infinitesimales de volumen dV y dV_0 del cuerpo \mathcal{B} en las configuraciones de referencia y actual, respectivamente. El cambio de volumen entre dV y dV_0 , viene dado por

$$dV = J(\mathbf{x}_0, t) dV_0, \quad (1.189)$$

donde $J(\mathbf{x}_0, t) = \det \mathbf{F}$ es conocido como la **razón de volumen** (o **determinante jacobiano**). En (1.189) dV y dV_0 se denominan **elemento de volumen espacial** (o **deformado**) y **elemento de volumen material** (o **sin deformar**), respectivamente. Como \mathbf{F} es invertible, entonces $J(\mathbf{x}_0, t) \neq 0$. Debido a que los elementos de volumen no pueden tener volúmenes negativos, se tiene que $J(\mathbf{x}_0, t) > 0$, para todo $\mathbf{x}_0 \in \kappa_0$ y para todo t .

Definición 1.48. A partir del gradiente de deformación \mathbf{F} , se pueden definir otros dos tensores,

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (1.190)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T, \quad (1.191)$$

denominados *tensor derecho de Cauchy-Green* y *tensor izquierdo de Cauchy-Green*, respectivamente.

Un teorema de suma importancia en la Mecánica de Medios Continuos, es el teorema de descomposición polar,

Teorema 1.3 (de descomposición polar). *Todo tensor invertible \mathbf{A} puede ser descompuesto de forma única, de dos maneras*

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (1.192)$$

donde \mathbf{R} es un tensor ortogonal y \mathbf{U} , \mathbf{V} son definidos positivos y simétricos.

Demostración. Para demostrar el teorema se hace uso del siguiente lema, el cual se da sin demostración (el lector interesado puede referirse a Bertram [40]),

Lema 1.1. *Sea $\mathbf{A} \in \text{Lin}^n$, entonces \mathbf{A} es invertible si y solo si $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ ($\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T$) es definido positivo. Además la raíz cuadrada \mathbf{U} de $\hat{\mathbf{C}}$ (\mathbf{V} de $\hat{\mathbf{B}}$) es simétrica, definida positiva y única.*

Además, se define el tensor $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}$, luego

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}^{-T}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{U}^{-2}\mathbf{A}^T, \quad (1.193)$$

pero \mathbf{U} es la raíz cuadrada de $\hat{\mathbf{C}}$, por tanto

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{A}\hat{\mathbf{C}}^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-T}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}, \quad (1.194)$$

luego \mathbf{R} es ortogonal. Para demostrar la unicidad, sea

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_1\mathbf{U}_1 = \mathbf{R}_2\mathbf{U}_2, \quad (1.195)$$

donde los tensores \mathbf{R}_i ($i = 1, 2$) son ortogonales y \mathbf{U}_i ($i = 1, 2$) son simétricos y definidos positivos. Entonces

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{U}_1^T \mathbf{R}_1^T = \mathbf{U}_2^T \mathbf{R}_2^T = \mathbf{U}_1 \mathbf{R}_1^{-1} = \mathbf{U}_2 \mathbf{R}_2^{-1}, \quad (1.196)$$

por tanto

$$\mathbf{U}_1 \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{U}_1 = \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{U}_2 \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{U}_2 \quad (1.197)$$

$$\mathbf{U}_1^2 = \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{U}_2^2, \quad (1.198)$$

haciendo uso del Lema 1.1

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2, \quad (1.199)$$

y por tanto

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2. \quad (1.200)$$

Ahora, se define

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}, \quad (1.201)$$

de forma análoga se demuestra que $\hat{\mathbf{R}}$ es un tensor ortogonal. Además

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{V}\hat{\mathbf{R}}, \quad (1.202)$$

pero como $\hat{\mathbf{R}}$ es un tensor ortogonal y de la unicidad de la solución, $\hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{V} \hat{\mathbf{R}}$ es un tensor simétrico y definido positivo. \square

1.2.4.1 Gradiente de velocidad material y espacial

Definición 1.49. La derivada respecto a la posición actual \mathbf{x} de un campo de velocidad espacial $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ se define por

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (1.203)$$

El campo espacial \mathbf{L} es conocido como el **gradiente de velocidad espacial**.

Tomando derivada material del gradiente de deformación \mathbf{F} ,

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \chi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \left(\frac{\partial \chi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} = \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t), \quad (1.204)$$

luego se da la siguiente definición.

Definición 1.50. La razón de cambio del gradiente de deformación \mathbf{F}

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0, t) = \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t), \quad (1.205)$$

se conoce como **gradiente de velocidad material**.

Proposición 1.6. El gradiente de velocidad espacial \mathbf{L} puede ser expresado en términos del gradiente de velocidad material, es decir,

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (1.206)$$

Demostración. En efecto,

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \dot{\chi}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \chi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} \right) \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (1.207)$$

□

1.3 Concepto de tensión

En el capítulo anterior, algunos aspectos cinemáticos del movimiento y la deformación de un cuerpo continuo fueron discutidos. El movimiento y la deformación dan origen a interacciones entre el material y el material fronterizo en la parte interior del cuerpo. Una consecuencia de estas interacciones es la tensión; fuerza por unidad de área. La noción de tensión, que es responsable de la deformación de materiales, es crucial en la Mecánica de Medios Continuos.

Debido a que la configuración actual de muchos problemas, especialmente aquellos que involucran sólidos, es no conocida, no es conveniente trabajar con tensores de tensión expresados en términos de coordenadas espaciales. Para algunos casos, se hace más conveniente trabajar con tensores de tensión referidos a la configuración de referencia o alguna configuración intermedia.

1.3.1 Vectores de tracción y tensores de tensión

Sea \mathcal{B} un cuerpo continuo deformable, ocupando una región arbitraria κ_t del espacio físico con frontera $\partial \kappa_t$ en el momento t , como se muestra en la Fig. 1.3.

Definición 1.51. Las fuerzas arbitrarias que actúan sobre partes o sobre toda la frontera de la superficie se denominan **fuerzas externas** (dichas fuerzas actúan a distancia), y aquellas que actúan sobre una superficie (ficticia) dentro del interior del cuerpo distribuidas de cierta forma se denominan **fuerzas internas**.

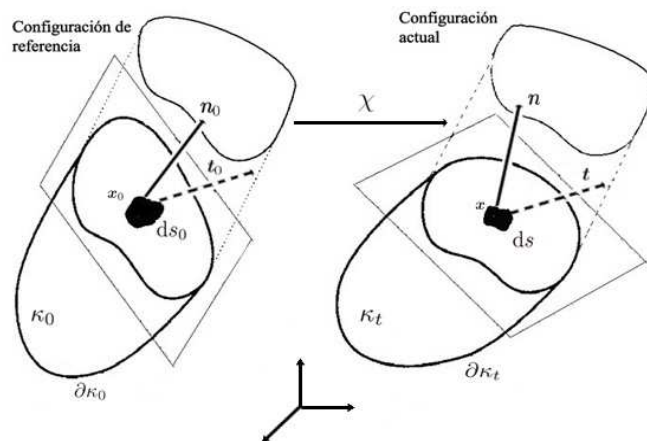


Figura 1.3: Vectores de tracción actuando sobre un elemento superficie infinitesimal con normal unitaria exterior.

Tomando una superficie plana que pasa por un punto dado $\mathbf{x} \in \kappa_t$. Como se ilustra en la Fig. 1.3, la superficie plana separa al cuerpo en dos porciones. El elemento de superficie espacial infinitesimal $ds \in \partial\kappa_t$, yacerá en el origen del vector unitario \mathbf{n} en \mathbf{x} . Como se considera la interacción de las dos porciones, las fuerzas internas y externas son transmitidas a lo largo de la superficie plana. Las cantidades \mathbf{x} , ds y \mathbf{n} están asociadas con la configuración actual del cuerpo y \mathbf{x}_0 , ds_0 y \mathbf{n}_0 están referidas a la configuración de referencia.

Si se denota por $d\mathbf{f}$ a la **fuerza resultante** (actual) actuando sobre el elemento de superficie, de acuerdo a la Fig. 1.3, para cualquier elemento de superficie, se tiene que

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}ds = \mathbf{t}_0ds_0. \quad (1.208)$$

Definición 1.52. El vector $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ representa el **vector de tracción de Cauchy** (fuerza por unidad de área de superficie en la configuración actual) ejercido sobre ds con vector normal unitario exterior \mathbf{n} .

Definición 1.53. El vector $\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}_0(\mathbf{x}_0, t, \mathbf{n}_0)$ representa el **primer vector de tracción de Piola-Kirchoff** (fuerza por unidad de área de superficie en la configuración de referencia) ejercido sobre ds_0 con normal unitaria exterior \mathbf{n}_0 a la frontera de la superficie $\partial\kappa_0$, y apunta hacia la misma dirección del vector de tracción de Cauchy.

Los vectores \mathbf{t} y \mathbf{t}_0 que actúan a través de los elementos de superficie ds y ds_0 con vectores normales \mathbf{n} y \mathbf{n}_0 respectivamente, son conocidos en la literatura como **fuerzas de contacto**, **vectores de tensión** o simplemente **cargas**.

Teorema 1.4 (de tensión de Cauchy). El vector de tensión en un punto de un cuerpo depende linealmente del vector normal a la superficie del cuerpo, es decir

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}, \quad (1.209)$$

$$\mathbf{t}_0(\mathbf{x}_0, t, \mathbf{n}_0) = \mathbf{P}(\mathbf{x}_0, t)\mathbf{n}_0, \quad (1.210)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ denota el **tensor de tensión de Cauchy**, mientras que \mathbf{P} se le conoce como **primer tensor de tensión de Piola-Kirchoff**.

Demostración. Para demostrar el teorema se toma un tetraedro donde los vectores de tracción asociados a las caras que se encuentran en los planos coordenados se escriben como

$$\mathbf{t}\mathbf{e}_j = \sigma_{1j}\mathbf{e}_1 + \sigma_{2j}\mathbf{e}_2 + \sigma_{3j}\mathbf{e}_3, \quad (1.211)$$

donde $j = 1, 2, 3$ y $\mathbf{t}_{\mathbf{e}_j} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_j)$. Teniendo en cuenta que en una posición de equilibrio las fuerzas actuando sobre el tetraedro deben sumar cero

$$\mathbf{t}_{\mathbf{n}} \Delta S + \sum_{j=1}^3 \mathbf{t}_{-\mathbf{e}_j} \Delta S_j + \mathbf{b} \Delta V = 0, \quad (1.212)$$

donde $\mathbf{t}_{\mathbf{n}} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$, $\Delta S_j = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j) \Delta S$ es la proyección de la superficie que no se encuentra contenida en los planos coordenados ΔS sobre el plano ortogonal en la dirección $j = 1, 2, 3$ y ΔV es el volumen del tetraedro.

Dividiendo (1.212) por ΔS y teniendo en cuenta que $\lim \frac{\Delta V}{\Delta S} = 0$,

$$\mathbf{t}_{\mathbf{n}} = - \sum_{j=1}^3 \mathbf{t}_{-\mathbf{e}_j} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j). \quad (1.213)$$

Pero la (tercera) **ley de Newton de acción y reacción** indica que

$$\mathbf{t}_{-\mathbf{n}} = -\mathbf{t}_{\mathbf{n}}, \quad (1.214)$$

luego de (1.214), (1.16) y (1.211)

$$\mathbf{t}_{\mathbf{n}} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{t}_{\mathbf{e}_j} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j) \quad (1.215)$$

$$= \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \mathbf{e}_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j) \quad (1.216)$$

$$= \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \mathbf{n}. \quad (1.217)$$

Por tanto la relación lineal entre $\mathbf{t}_{\mathbf{n}}$ y \mathbf{n} se define por el tensor de segundo orden

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (1.218)$$

La deducción de (1.210) se puede obtener de forma análoga. \square

La relación (1.209), es uno de los axiomas más importantes de la Mecánica de Medios Continuos.

Proposición 1.7. *El tensor de tensión de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ y el primer tensor de tensión de Piola-Kirchoff \mathbf{P} están relacionados a través de la siguiente fórmula*

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}. \quad (1.219)$$

Demostración. De (1.208) se obtiene haciendo uso de (1.209) y (1.210) que

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) ds = \mathbf{t}_0(\mathbf{x}_0, t, \mathbf{n}_0) ds_0, \quad (1.220)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} ds = \mathbf{P}(\mathbf{x}_0, t) \mathbf{n}_0 ds_0. \quad (1.221)$$

Por medio de (1.189) se tiene la siguiente relación

$$dV = ds \mathbf{n} \cdot d\mathbf{x} = J ds_0 \mathbf{n}_0 \cdot d\mathbf{x}_0, \quad (1.222)$$

haciendo uso de (1.186) la ecuación (1.222) toma la forma,

$$(\mathbf{F}^T ds \mathbf{n} - J ds_0 \mathbf{n}_0) \cdot d\mathbf{x}_0 = 0, \quad (1.223)$$

como la ecuación (1.223) se cumple para cualquier elemento de línea $d\mathbf{x}_0$, se tiene que

$$ds\mathbf{n} = J\mathbf{F}^{-T}ds_0\mathbf{n}_0. \quad (1.224)$$

La fórmula anterior se conoce como **fórmula de Nanson**. Luego utilizando (1.224) se obtiene que

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}. \quad (1.225)$$

□

Luego una vez obtenido el tensor de tensión de Cauchy, a través de (1.219) se puede calcular inmediatamente el tensor de Piola-Kirchoff. La expresión explícita de $\boldsymbol{\sigma}$ resulta de (1.219), es decir,

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{P}\mathbf{F}^T, \quad (1.226)$$

la cual implica que

$$\mathbf{P}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{P}^T. \quad (1.227)$$

Consecuentemente, el tensor de segundo orden \mathbf{P} es, en general, no simétrico.

1.4 Ecuaciones de balance

La Mecánica de Medios Continuos se basa en una serie de postulados o principios generales que se suponen siempre válidos, independientemente del tipo de material y del rango de desplazamientos o de deformaciones. Algunos de ellos son la conservación de la masa, la conservación del momento lineal, entre otros. Tales principios son válidos en todas las ramas de la Mecánica de Medios Continuos.

1.4.1 Conservación de la masa

Todo cuerpo continuo \mathcal{B} posee masa.

Definición 1.54. La **masa** del cuerpo continuo \mathcal{B} , denotada por m , es una propiedad física comúnmente definida como una medida (un número positivo) de la cantidad de material contenido en un cuerpo \mathcal{B} , la cual es invariante durante un movimiento.

A fin de realizar un estudio macroscópico, se asume que la masa está continuamente (o al menos por pedazos) distribuida sobre una región arbitraria κ_t (del espacio físico) con superficie límite $\partial\kappa_t$ en el instante t .

En la física no relativista, la masa no puede crearse o destruirse. Lo cual implica que durante los sucesivos cambios de estados de deformación, la masa m de un cuerpo \mathcal{B} , se conserva. Luego, si una partícula tiene cierta masa en la configuración de referencia debe mantenerse igual durante un movimiento.

Definición 1.55. Se define un **sistema cerrado** como un sistema que consiste de una cantidad fija de masa en una región κ_t con frontera $\partial\kappa_t$ que depende del tiempo t .

Entonces, considerando un sistema cerrado

$$m(\kappa_0) = m(\kappa_t) > 0 \quad \forall t, \quad (1.228)$$

La relación anterior es una aserción de una ley mecánica fundamental conocida en la literatura como **conservación de masa**. Notése que la masa m es independiente del movimiento y de la región ocupada por el cuerpo. Por tanto, la derivada material de la masa da como resultado,

$$\frac{Dm(\kappa_0)}{Dt} = \frac{Dm(\kappa_t)}{Dt} = 0. \quad (1.229)$$

La forma diferencial relativa a la expresión (1.228) se escribe como

$$dm(\mathbf{x}_0) = dm(\mathbf{x}, t) > 0, \quad (1.230)$$

con el elemento de masa infinitesimal dm .

La masa de κ_0 y κ_t se caracterizan por campos escalares continuos (o al menos continuos a pedazos), es decir, $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{x}_0) > 0$ y $\rho = \rho(\mathbf{x}, t) > 0$, respectivamente.

Definición 1.56. La propiedad ρ_0 se conoce como **densidad de masa de referencia** o solamente **densidad** y a ρ como **densidad de masa espacial**, durante un movimiento $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}_0, t)$. Las densidades de masa ρ_0 y ρ en los puntos \mathbf{x}_0 y \mathbf{x} se definen, respectivamente por

$$\rho_0(\mathbf{x}_0) = \lim_{\Delta V_0(\kappa_0) \rightarrow 0} \frac{\Delta m(\kappa_0)}{\Delta V_0(\kappa_0)}, \quad (1.231)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta V(\kappa_t) \rightarrow 0} \frac{\Delta m(\kappa_t)}{\Delta V(\kappa_t)}, \quad (1.232)$$

donde Δm denota una función continua de masa incremental de un elemento de volumen incremental en las configuraciones de referencia y actual, los cuales se han denotado por ΔV_0 y ΔV , respectivamente.

Note que ρ_0 no depende de t e intrínsecamente esta asociada con la configuración de referencia del cuerpo. Por tanto, ρ_0 solo depende de la posición \mathbf{x}_0 escogida en la configuración de referencia κ_0 .

Además, en la forma diferencial (1.231) y (1.232), toman la siguiente forma

$$dm(\mathbf{x}_0) = \rho_0(\mathbf{x}_0)dV_0, \quad (1.233)$$

$$dm(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)dV. \quad (1.234)$$

Sustituyendo (1.233) y (1.234) en (1.230) se obtiene que

$$\rho_0(\mathbf{x}_0)dV_0 = \rho(\mathbf{x}, t)dV > 0, \quad (1.235)$$

lo cual significa que el volumen crece cuando decrece la densidad. Integrando las expresiones (1.233) y (1.234) sobre la región entera, se encuentra la masa total m de esa región. Por lo tanto, una expresión alternativa para (1.235), es

$$m = \int_{\kappa_0} \rho_0(\mathbf{x}_0)dV_0 = \int_{\kappa_t} \rho(\mathbf{x}, t)dV > 0, \quad (1.236)$$

para todo tiempo t e implica,

$$\dot{m} = \frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\kappa_t} \rho(\mathbf{x}, t)dV = 0, \quad (1.237)$$

por tanto, para que la masa se conserve es necesario que la derivada material de m sea cero para todas las regiones κ_t de un cuerpo que cambia en el tiempo (la masa no varía durante el movimiento del cuerpo).

Definición 1.57. Una ecuación que se mantiene válida en todos los puntos de un cuerpo continuo y para todo t , se denomina **forma local** o **forma diferencial** de dicha ecuación. Una ecuación en la cual las cantidades físicas sobre cierta región del espacio son integradas se denomina **forma global** o **forma integral** de la ecuación.

Luego (1.235) es la forma local de la ley de conservación de la masa, mientras que (1.236) es la forma global.

Ahora se quiere hallar una relación entre $\rho_0(\mathbf{x}_0) \in \kappa_0$ y $\rho(\mathbf{x}, t) \in \kappa$. Sustituyendo (1.189) en (1.236) se obtiene que

$$\int_{\kappa_0} \left(\rho_0(\mathbf{x}_0) - \rho(\chi(\mathbf{x}_0, t), t) J \right) dV_0 = 0. \quad (1.238)$$

Asumiendo que V_0 es un volumen arbitrario de la región κ_0 , se concluye que

$$\rho_0(\mathbf{x}_0) = \rho(\chi(\mathbf{x}_0, t), t) J, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \kappa_0. \quad (1.239)$$

Definición 1.58. La fórmula (1.239) se denomina **ecuación de balance de masa** en la descripción Lagrangiana.

Además, como ρ_0 es independiente del tiempo, se tiene una forma simplificada de (1.239)

$$\overbrace{\rho(\chi(\mathbf{x}_0, t), t) J}^{\dot{}} = 0. \quad (1.240)$$

Proposición 1.8. La razón de cambio de J es

$$\dot{J} = J \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.241)$$

Demostración. Haciendo uso de la regla de la cadena y de las relaciones (1.73), (1.147), (1.206)

$$\dot{J} = J_{, \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} = J \mathbf{F}^{-T} : \mathbf{L} \mathbf{F} = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^T : \mathbf{L} = J \mathbf{I} : \mathbf{L} = J \text{tr}(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) = J \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.242)$$

□

Entonces, (1.240) toma la forma

$$\overbrace{\rho(\chi(\mathbf{x}_0, t), t) J}^{\dot{}} = J (\dot{\rho} + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}) = 0. \quad (1.243)$$

donde la derivada material del campo espacial ρ está dada por

$$\dot{\rho} = \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla_{\mathbf{x}} \rho) \cdot \mathbf{v}. \quad (1.244)$$

Pero $J > 0$, entonces

$$\dot{\rho} + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.245)$$

es decir

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0. \quad (1.246)$$

Definición 1.59. La ecuación (1.246) es la **ecuación de balance de masa** en la descripción Euleriana.

Si la densidad de un cuerpo continuo es constante, de la relación (1.245) se deduce que $\dot{\rho} = 0$, esta es una restricción cinemática que caracteriza a un movimiento que conserva el volumen (isocórico), es decir, $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Definición 1.60. Un cuerpo se denomina **incompresible** si se cumple que

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.247)$$

También se puede tomar la condición equivalente $J = 1$. Por otro lado

Definición 1.61. Si no se cumple la relación (1.247) se dice que el material es **compresible**.

La compresibilidad es una propiedad de la materia a la cual se debe que todos los cuerpos disminuyan de volumen al someterlos a una presión o compresión determinada manteniendo constantes otros parámetros.

1.4.2 Conservación del momento lineal

Sea \mathcal{B} un cuerpo continuo ocupando cierta región κ_t en el instante t , con superficie límite $\partial\kappa_t$. Se considera un sistema cerrado con un movimiento dado $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}_0, t)$, densidad de masa $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ y campo de velocidad espacial $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

Definición 1.62. Se define el **momento lineal** total \mathbf{l} por la función vectorial

$$\mathbf{l}(t) = \int_{\kappa_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\kappa_0} \rho_0(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t) dV_0. \quad (1.248)$$

La ecuación de momento (1.248) se ha formulado con respecto a la configuración actual y de referencia con cantidades asociadas ρ , \mathbf{v} , dV y ρ_0 , \mathbf{v}_0 , dV_0 , respectivamente. Tomando derivada material en la expresión (1.248), se obtiene una propiedad fundamental para un cuerpo continuo, conocida como **ecuación de balance de momento lineal**,

$$\dot{\mathbf{l}}(t) = \frac{D}{Dt} \int_{\kappa_t} \rho \mathbf{v} dV = \frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \rho_0 \mathbf{v}_0 dV_0 = \mathbf{F}(t), \quad (1.249)$$

donde $\mathbf{F}(t)$ representa una función vectorial que caracteriza la **fuerza resultante**. En el caso que \mathbf{F} sea cero, el momento lineal se dice que es conservativo. El principio de balance de momento lineal es una generalización de la primera ley de Newton del movimiento en el contexto de la Mecánica de Medios Continuos.

A continuación se define la estructura de las fuerzas actuando sobre un cuerpo de continuo. Sea $\partial\kappa_t$ la frontera de una región arbitraria κ_t , que se encuentra sujeta al vector de tracción de Cauchy $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$. El vector unitario \mathbf{n} representa la normal exterior a un elemento de superficie infinitesimal ds de $\partial\kappa_t$.

Definición 1.63. El campo vectorial espacial $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ se denomina **fuerza del cuerpo**, el cual se define por unidad de volumen actual en la región κ_t actuando sobre una partícula, (véase Fig. 1.4).

Por tanto la fuerza resultante $\mathbf{F}(t)$ en la configuración actual tiene la siguiente forma aditiva

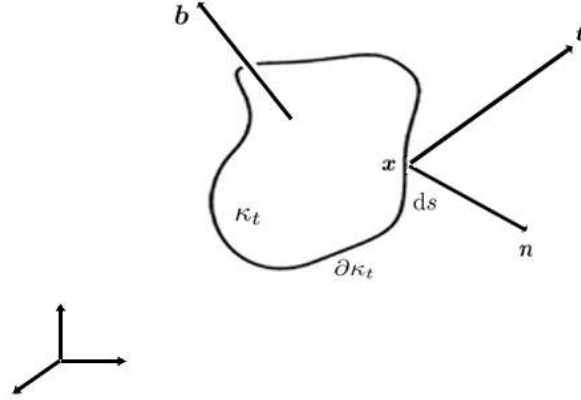


Figura 1.4: Estructuras de las fuerzas actuando en la configuración actual.

$$\mathbf{F}(t) = \int_{\partial\kappa_t} \mathbf{t} ds + \int_{\kappa_t} \mathbf{b} dV. \quad (1.250)$$

Consecuentemente, la forma global (1.249) de la ecuación de balance de momento lineal toma la forma,

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_t} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\partial\kappa_t} \mathbf{t} ds + \int_{\kappa_t} \mathbf{b} dV. \quad (1.251)$$

Con el objetivo de expresar la ecuación de balance de momento lineal en términos de las coordenadas materiales se introduce la siguiente definición.

Definición 1.64. El campo vectorial material $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_0(\mathbf{x}_0, t)$ se denomina **fuerza del cuerpo de referencia**. La cual actúa en la región κ_t y está, en contraste con la fuerza del cuerpo \mathbf{b} , referida a la posición de referencia \mathbf{x}_0 y mide la fuerza por unidad de volumen de referencia.

Usando el cambio de volumen (1.189),

$$\int_{\kappa_t} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\kappa_0} \mathbf{b}(\chi(\mathbf{x}_0, t), t) J(\mathbf{x}_0, t) dV_0 = \int_{\kappa_0} \mathbf{b}_0(\mathbf{x}_0, t) dV_0, \quad (1.252)$$

o en la forma local

$$\mathbf{b}_0(\mathbf{x}_0, t) = J(\mathbf{x}_0, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t). \quad (1.253)$$

Entonces, de (1.249) y (1.253), la relación (1.251) toma la siguiente forma

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \rho_0 \mathbf{v}_0 dV_0 = \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{t}_0 ds_0 + \int_{\kappa_0} \mathbf{b}_0 dV_0, \quad (1.254)$$

la cual es la forma global de la ecuación de balance de momento lineal en la descripción material.

1.4.3 Ecuación del movimiento

Teorema 1.5. Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación de balance de momento lineal se satisfaga, es la existencia de un campo tensorial $\boldsymbol{\sigma}$, de forma tal, que

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) \mathbf{n}. \quad (1.255)$$

La demostración del teorema anterior puede encontrarse en Holzapfel [28].

Proposición 1.9. Sea $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ el vector de tracción de Cauchy. Entonces

$$\int_{\partial\kappa_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) ds = \int_{\kappa_t} \nabla \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) dV. \quad (1.256)$$

Demostración. Aplicando el teorema de tensión de Cauchy (1.209) y el teorema de la divergencia, el cual convierte una integral de superficie en una integral de volumen, se tiene el resultado pues

$$\int_{\partial\kappa_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) ds = \int_{\partial\kappa_t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} ds = \int_{\kappa_t} \nabla \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) dV. \quad (1.257)$$

□

Ahora, con el objetivo de hallar la ecuación del movimiento se demuestra la siguiente proposición,

Proposición 1.10. Sea $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ un campo espacial suave y continuamente diferenciable. Entonces

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_t} \mathbf{a} dV = \int_{\kappa_t} \rho \frac{D\mathbf{a}}{Dt} dV. \quad (1.258)$$

Demostración. Como la región de integración V depende del tiempo t no es posible conmutar las operaciones de diferenciación e integración. Por tanto se hace necesario transformar la integral del miembro izquierdo de (1.258) a la configuración de referencia, en donde V_0 es independiente de t ,

$$\int_{\kappa_t} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\kappa_0} \mathbf{a}(\chi(\mathbf{x}_0, t), t) J(\mathbf{x}_0, t) dV_0. \quad (1.259)$$

Luego,

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_t} \mathbf{a} dV = \int_{\kappa_0} \frac{D}{Dt} (\mathbf{a} J) dV_0 \quad (1.260)$$

$$= \int_{\kappa_0} \left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt} J + \mathbf{a} \dot{J} \right) dV_0 \quad (1.261)$$

$$= \int_{\kappa_0} \left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt} + \mathbf{a} \frac{\dot{J}}{J} \right) J dV_0, \quad (1.262)$$

entonces

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_t} \mathbf{a} dV = \int_{\kappa_t} \left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt} + \mathbf{a} \nabla \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \right) dV. \quad (1.263)$$

Ahora, si se sustituye \mathbf{a} por $\rho \mathbf{a}$, (1.263) toma la forma

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_t} \rho \mathbf{a} dV = \int_{\kappa_t} \left(\frac{D(\rho \mathbf{a})}{Dt} + \rho \mathbf{a} \nabla \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \right) dV, \quad (1.264)$$

es decir,

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_t} \rho \mathbf{a} dV = \int_{\kappa_t} \left(\rho \frac{D\mathbf{a}}{Dt} + \mathbf{a} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \right) \right) dV. \quad (1.265)$$

De la ecuación de balance de masa (1.246)

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_t} \rho \mathbf{a} dV = \int_{\kappa_t} \rho \frac{D\mathbf{a}}{Dt} dV. \quad (1.266)$$

□

La relación (1.258), permite escribir la ecuación de balance de momento lineal (1.249) de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{i}} = \int_{\kappa_t} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV = \int_{\kappa_0} \rho_0 \frac{D\mathbf{v}_0}{Dt} dV_0. \quad (1.267)$$

Sustituyendo (1.256) en (1.251)

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_t} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\kappa_t} \nabla \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{\kappa_t} \mathbf{b} dV, \quad (1.268)$$

pero de (1.266)

$$\int_{\kappa_t} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV = \int_{\kappa_t} \nabla \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{\kappa_t} \mathbf{b} dV, \quad (1.269)$$

o en la forma equivalente

$$\int_{\kappa_t} \left(\nabla \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} - \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) dV = 0. \quad (1.270)$$

Definición 1.65. La expresión (1.270) es conocida como la **primera ecuación de movimiento de Cauchy** en forma global.

La primera ecuación de movimiento de Cauchy en forma global se debe mantener válida para cualquier volumen arbitrario V , por lo cual se deduce que

$$\nabla \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} - \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = 0, \quad (1.271)$$

para todo \mathbf{x} de V y para todo t .

Definición 1.66. La expresión (1.271) es conocida como la primera ecuación de movimiento de Cauchy en forma local.

En el caso que se asuma la aceleración igual a cero para todo $\mathbf{x} \in \kappa_t$ (el caso de velocidad constante no es excluido), la ecuación (1.271) se reduce a

$$\nabla \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0, \quad (1.272)$$

Definición 1.67. La ecuación (1.272) se denomina **ecuación de equilibrio de Cauchy**.

En la literatura a esta ecuación se le llama también ecuación de balance de momento lineal y es el nombre que se adoptará en este trabajo para referirse a (1.272).

1.5 Relaciones constitutivas

Las ecuaciones introducidas en los capítulos anteriores son esenciales para caracterizar la cinemática, las tensiones y las ecuaciones de balance, de cualquier cuerpo continuo. Las cuales permanecen válidas en todas las ramas de la Mecánica de Medios Continuos. Sin embargo, estas no distinguen un material de otro. Para el caso de cuerpos deformables las ecuaciones mencionadas no son suficiente para determinar la respuesta de un material específico. Por tanto, se deben establecer ecuaciones adicionales en la forma de leyes constitutivas, una ley constitutiva debe aproximar el comportamiento físico real del material observado. Cada campo de la Mecánica de Medios Continuos estudia ciertos medios continuos, incluyendo los fluidos, los cuales son líquidos o gases y los sólidos. El campo de la Mecánica de Medios Continuos, denominado **Mecánica de Fluidos**, es aquel donde las ecuaciones constitutivas son válidas para dichos objetos físicos, mientras que, la **Mecánica de Sólidos**, es aquella donde las ecuaciones constitutivas son válidas para los sólidos. El actual capítulo se concentra en los materiales sólidos hiperelásticos y en especial en los que presentan la propiedad de isotropía y de compresibilidad.

1.5.1 Comentarios generales sobre ecuaciones constitutivas

El objetivo de las **teorías constitutivas** es desarrollar modelos matemáticos para representar el comportamiento real de la materia. Dichas teorías relacionan magnitudes tensoriales, las cuales no son derivables de leyes de conservación u otro tipo de leyes universales y que son específicas del tipo de problema estudiado. Las teorías constitutivas tienen vital importancia pero constituyen un tema difícil dentro de la mecánica moderna no lineal.

1.5.1.1 Ecuaciones constitutivas para materiales hiperelásticos

En el caso de un material hiperelástico, la teoría resultante se conoce como **teoría de hiperelasticidad finita**, en la cual la mecánica no lineal de medios continuos constituye la base fundamental. El concepto básico de hiperelasticidad es que el material se comporta de forma elástica (es decir, retorna a su estado original) incluso para deformaciones finitas.

Definición 1.68. Un material se dice **hiperelástico**, si una **energía de deformación** específica ψ existe como una función diferenciable del gradiente de deformación.

Definición 1.69. Para el caso en el cual ψ sea solamente una función de \mathbf{F} o de algún tensor de tensión, la función de energía libre de Helmholtz es conocida como **función de energía de deformación**.

La función de energía de deformación $\psi = \psi(\mathbf{F})$ es una función escalar del tensor variable \mathbf{F} , la cual se asume continua. Es decir, un material hiperelástico, no es más que un material elástico no lineal para el cual las propiedades materiales están caracterizadas en términos de la función de energía de deformación (por unidad de volumen).

Se restringe la presente subsección a los **materiales homogéneos** en los cuales la distribución de los constituyentes internos se asume uniforme. Para este tipo de material ideal, la función de energía de deformación ψ depende solo del gradiente de deformación \mathbf{F} . Para un **material heterogéneo**, ψ dependerá adicionalmente de la posición de un punto del material.

Definición 1.70. Un material hiperelástico es definido como una subclase de un material elástico, donde

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}, \quad (1.273)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T = J^{-1} \mathbf{F} \left(\frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right)^T. \quad (1.274)$$

Las ecuaciones anteriores son conocidas como **ecuaciones constitutivas** y establecen un modelo axiomático como base, para aproximar el comportamiento de un material real. Tal modelo es denominado **modelo constitutivo**. Como se nota en las ecuaciones constitutivas (1.273) y (1.274), la respuesta de tensión de los materiales hiperelásticos se deriva de una función de energía, lo que implica que la hiperelasticidad tiene una estructura conservativa.

1.5.1.2 Formas equivalentes de la función de energía de deformación

La energía de deformación $\psi(\mathbf{F})$ generada por el movimiento $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}_0, t)$ se asume objetiva, es decir, después de una traslación y una rotación del cuerpo en el espacio, la cantidad de energía almacenada no cambia. Por lo tanto, la energía de deformación $\psi(\mathbf{F})$ tiene que ser igual a la energía de deformación $\psi(\mathbf{F}^+)$ generada por el movimiento $\mathbf{x}^+ = \chi^+(\mathbf{x}_0, t^+)$, la cual difiere de χ por un movimiento superpuesto de cuerpo rígido, es decir,

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}, \quad (1.275)$$

donde \mathbf{Q} es un tensor ortogonal tal que $\det \mathbf{Q} = 1$ (la orientación es preservada). Entonces

$$\mathbf{F}^+ = \frac{\partial \mathbf{x}^+}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{Q}\mathbf{F}, \quad (1.276)$$

luego ψ no puede ser una función arbitraria de \mathbf{F} , en particular, se tiene la siguiente restricción

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{F}^+) = \psi(\mathbf{Q}\mathbf{F}), \quad (1.277)$$

para todo tensor \mathbf{F} , con $\det \mathbf{F} > 0$ y para todo tensor ortogonal \mathbf{Q} .

Teorema 1.6. Una condición necesaria y suficiente para que la energía de deformación sea objetiva durante movimientos superpuestos de cuerpo rígido es que

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{U}), \quad \forall \mathbf{F}. \quad (1.278)$$

Demostración. Se toma el tensor ortogonal de rotación \mathbf{R}^T y del teorema de descomposición polar

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{R}^T \mathbf{F}) = \psi(\mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U}), \quad (1.279)$$

es decir

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{U}), \quad \forall \mathbf{F}. \quad (1.280)$$

De (1.280) se concluye que ψ es independiente de la parte rotacional de $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$. Luego un material hiperelástico depende solamente del tensor simétrico \mathbf{U} . \square

1.5.1.3 Formas reducidas de las ecuaciones constitutivas

El teorema 1.6 permite expresar ψ como una función de \mathbf{U} , pero como el tensor derecho de Cauchy-Green está dado por $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$, se puede expresar a ψ como

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{C}). \quad (1.281)$$

Proposición 1.11. Una forma reducida de la ecuación constitutiva para materiales hiperelásticos es

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T. \quad (1.282)$$

Demostración. Considere la derivada de la energía de deformación $\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{C})$ respecto al tiempo t . De la regla de la cadena y la propiedad (1.81)

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} = \text{tr} \left[\left(\frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right)^T \dot{\mathbf{F}} \right] = \text{tr} \left[\left(\frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \right) (\dot{\mathbf{C}})^T \right], \quad (1.283)$$

pero

$$\dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} \quad (1.284)$$

$$= \mathbf{F}^T (\mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T + \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) \mathbf{F} \quad (1.285)$$

$$= \mathbf{F}^T (\mathbf{L}^T + \mathbf{L}) \mathbf{F}, \quad (1.286)$$

luego

$$(\dot{\mathbf{C}})^T = \dot{\mathbf{C}}. \quad (1.287)$$

Entonces

$$\dot{\psi} = \text{tr} \left[\left(\frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \right) \dot{\mathbf{C}} \right] = \text{tr} \left[\left(\frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \right) (\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}})^T \right] + \text{tr} \left[\left(\frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \right) \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} \right], \quad (1.288)$$

finalmente

$$\dot{\psi} = 2 \text{tr} \left[\left(\frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \right) \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} \right]. \quad (1.289)$$

De (1.283) y (1.289)

$$\left(\frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right)^T = 2 \frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T, \quad (1.290)$$

la cual, sustituyendo en (1.274), brinda el resultado deseado

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T. \quad (1.291)$$

□

1.5.2 Materiales hiperelásticos isotrópicos

A continuación se restringe la función de energía de deformación por una propiedad en particular que el material puede poseer, denominada **isotropía**. Esta propiedad está basada en la idea física de que la respuesta del material en un experimento de deformación-tensión, es la misma en todas las direcciones. En esta sección interesa la formulación matemática de isotropía dentro del contexto de la hiperelasticidad.

Se considera un punto arbitrario \mathbf{x}_0 de un cuerpo elástico continuo ocupando una región κ_0 en el instante $t = 0$. Un movimiento χ lleva el punto $\mathbf{x}_0 \in \kappa_0$ a un punto $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}_0, t)$ de la configuración actual κ_t en el instante t . Se asume que un cuerpo ocupando la región κ_0 se traslada por el vector \mathbf{c} y es rotado por el tensor ortogonal \mathbf{Q} de acuerdo a

$$\mathbf{x}_0^* = \mathbf{c} + \mathbf{Q} \mathbf{x}_0, \quad (1.292)$$

La ecuación anterior transforma κ_0 en una nueva región κ_0^* (nueva configuración de referencia) y el punto con vector de posición \mathbf{x}_0 a un nuevo lugar identificado por el vector de posición $\mathbf{x}_0^* \in \kappa_0^*$ (véase Fig. 1.5).

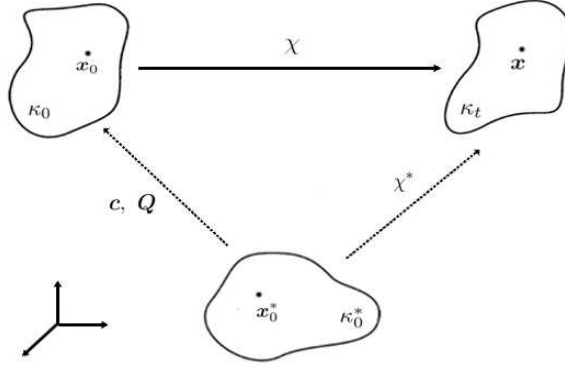


Figura 1.5: Movimiento de un cuerpo sólido superpuesto sobre la configuración de referencia.

Sea ahora un movimiento diferente $\mathbf{x} = \chi^*(\mathbf{x}_0^*, t)$ que transforma a κ_0^* en la configuración actual κ_t de modo que

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}_0, t) = \chi^*(\mathbf{x}_0^*, t). \quad (1.293)$$

Aplicando la regla de la cadena y de la relación (1.292), el gradiente de deformación \mathbf{F} puede ser expresado como

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0^*} \mathbf{Q} = \mathbf{F}^* \mathbf{Q}, \quad (1.294)$$

donde $\mathbf{F}^* = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0^*}$ es el gradiente de deformación relativo a la región κ_0^* . De la relación anterior se tiene la transformación

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F} \mathbf{Q}^T. \quad (1.295)$$

Por tanto de (1.295) se tiene la siguiente definición

Definición 1.71. Se dice que un material hiperelástico es **isotrópico** relativo a la configuración de referencia κ_0 , si los valores de las energías de deformación $\psi(\mathbf{F})$ y $\psi(\mathbf{F}^*)$ son los mismos para todo tensor ortogonal \mathbf{Q} .

De (1.295) se puede escribir

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{F}^*) = \psi(\mathbf{F} \mathbf{Q}^T). \quad (1.296)$$

Definición 1.72. Si se puede mostrar que el movimiento de un cuerpo continuo superpuesto sobre cualquier configuración de referencia trasladada y/o rotada, da lugar a la misma función de energía de deformación en el momento t , entonces se dice que el material es **isotrópico**. En el caso contrario se dice que el material es **anisotrópico**.

Si se supone que durante el movimiento $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}_0, t)$ la función de energía de deformación puede adoptar la forma $\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{C})$ y se asume además que el material hiperelástico es isotrópico, entonces

$$\psi(\mathbf{C}) = \psi((\mathbf{F}^*)^T \mathbf{F}^*) = \psi(\mathbf{Q} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{Q}^T), \quad (1.297)$$

la relación (1.297) implica que

$$\psi(\mathbf{C}) = \psi(\mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{Q}^T). \quad (1.298)$$

Definición 1.73. Si (1.298) es válida para todo tensor simétrico \mathbf{C} y para todo tensor ortogonal \mathbf{Q} , se dice que $\psi(\mathbf{C})$ es una **función escalar isotrópica** de la variable \mathbf{C} o simplemente un **invariante** del tensor simétrico \mathbf{C} .

Además de la relación (1.282) se puede obtener otra expresión para representar la energía de deformación de un material hiperelástico.

Proposición 1.12. Para un material hiperelástico isotrópico, la energía de deformación puede ser expresada por la identidad,

$$\psi(\mathbf{C}) = \psi(\mathbf{B}), \quad (1.299)$$

Demostración. En efecto, sustituyendo \mathbf{Q} en (1.298) por el tensor \mathbf{R} y del teorema de descomposición polar, se tiene (1.299), la cual permite escribir las ecuaciones constitutivas con respecto al tensor izquierdo de Cauchy-Green \mathbf{B} ,

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \frac{\partial \psi(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B} = 2\rho \mathbf{B} \frac{\partial \psi(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}}. \quad (1.300)$$

□

CAPÍTULO 2

Crecimiento de un tumor

2.1 Descripción biomédica

En sentido restringido, un tumor es cualquier bulto que se deba a un aumento en el número de células que lo componen. El cuerpo humano contiene alrededor de 100 trillones de células que son generadas por divisiones celulares que ocurren repetidamente de una célula precursora. Mientras continúa la proliferación, algunas células se vuelven más diferenciadas que otras, adoptando una estructura, química y función diferente. Cada órgano en el cuerpo humano es una agregación de muchos tipos de células unidas entre ellas por una estructura de soporte intracelular. Aunque todas las células del organismo están diferenciadas una de otras, todas ellas presentan ciertas características que son parecidas. Cada célula es una estructura compleja cuyo propósito es mantener un ambiente intracelular para las reacciones metabólicas complejas, para su reproducción cuando sea necesario, y para protegerse de los peligros del ambiente que las rodean.

Una mutación genética es cualquier cambio heredado en el material genético que puede representar alteraciones irreversibles en la secuencia de nucleótidos de ADN. Estas mutaciones pueden ser fenotípicamente silentes o visibles. Las mutaciones causan cambios en el mensaje hereditario del organismo y pueden resultar tanto en daños físicos, como químicos al ADN o de errores espontáneos durante la replicación. Las mutaciones que dañan al ADN están causadas generalmente por uno o tres eventos: radiación ionizante, causando ruptura en la cadena de doble hebra de ADN por la acción de radicales libres; radiaciones ultravioletas, creando entrecruzamientos del ADN provocados por la absorción de energía UV por las pirimidinas; genes químicos mutantes, modificando las bases de ADN y alterando el comportamiento de las parejas de bases. Las mutaciones en los tejidos germinales tienen un significado biológico enorme, mientras que las mutaciones somáticas¹ pudieran causar cáncer.

Tumor: Inicialmente, el término tumor, se aplicó a la tumefacción, hinchazón, bulto o aumento localizado de tamaño, en un órgano o tejido. Incluso, el concepto aún se aplica cuando se dice que los cinco signos cardinales de la inflamación son: tumor, dolor, calor, rubor e impotencia funcional. Con el transcurso del tiempo se olvidó el sentido no neoplásico de la palabra tumor y en la actualidad el término es el equivalente o sinónimo de neoplasia; y por lo tanto, se dice que hay tumores localizados o invasivos, y pueden ser benignos o malignos.

Cáncer: La palabra cáncer deriva del latín, y como la derivada del griego karkinos (*καρκινος*), lo que significa “cangrejo”. Se dice que las formas corrientes de cáncer avanzado adoptan una forma abigarrada, con ramificaciones, que se adhieren a todo lo que agarran, con la obstinación y forma similar a la de un cangrejo marino. Neoplasia caracterizada por el crecimiento incontrolado de células anaplásicas que tienden a invadir el tejido vecino y a metastatizar a distancia. Se considera a veces sinónimo de los términos neoplasia y tumor; sin embargo, el cáncer siempre es una neoplasia o tumor maligno.

Neoplasia: Crecimiento nuevo de tejido caracterizado por la proliferación progresiva e incontrolada de células anormales, que pueden ser benignos o malignas.

¹En genética, es la mutación que afecta a las células somáticas (aquellas que forman el crecimiento de tejidos y órganos) del individuo.

En la gran mayoría de los casos, la diferenciación morfológica¹ entre un tumor benigno y uno maligno puede hacerse con considerable certidumbre; sin embargo, a veces una neoplasia no permite su clasificación. Todo diagnóstico morfológico es subjetivo y es una predicción acerca de la evolución futura de una neoplasia. Ocasionalmente esta predicción se frustra por la notable discrepancia entre el aspecto morfológico de un tumor y su comportamiento biológico, sin embargo esta confusión o ambigüedad no es la regla; en general, existen criterios por los que pueden diferenciarse los tumores benignos de los malignos, como son: la diferenciación² y anaplasia³, la tasa de crecimiento, invasión local y metástasis⁴.

Tumor benigno

- Diferenciación y anaplasia: Bien diferenciados; la estructura puede ser típica del tejido de origen.
- La tasa de crecimiento: Habitualmente progresivo y lento; puede detenerse o regresar; las figuras de mitosis⁵ son infrecuentes y normales.
- Invasión local: Habitualmente masas cohesivas que se expanden con buena delimitación, que no invaden o infiltran los tejidos normales de alrededor.
- Metástasis: Ausente

Tumor maligno

- Diferenciación y anaplasia: Cierta falta de diferenciación con anaplasia; la estructura es con frecuencia atípica.
- La tasa de crecimiento: Errático y puede ir de lento a rápido; las imágenes de mitosis pueden ser numerosas y anormales.
- Invasión local: Localmente invasores, infiltran los tejidos normales de alrededor; a veces pueden tener la apariencia de cohesión y expansión.
- Metástasis: Frecuentemente presentes; cuanto mayor y más indiferenciado sea el primario, más probables son las metástasis.

Se pudiera realizar la siguiente pregunta: ¿No tienen riesgo todos los tumores benignos? Aunque puede haber algo de riesgo, una prolongada experiencia acumulada indica que la mayoría de las neoplasias benignas no se malignizan. Sin embargo, se pueden ofrecer numerosos ejemplos de tipos de cáncer que aparecen, aunque rara vez, en tumores benignos. Es imposible generalizar debido a que cada tipo de neoplasia benigna se asocia a un grado propio de riesgo, que va desde prácticamente nunca hasta frecuentemente. Solo los estudios de seguimiento de grandes series de cada neoplasia pueden determinar el riesgo.

La única forma segura de evitar el cáncer es no nacer; vivir es correr el riesgo. Sin embargo, en muchas circunstancias el riesgo es superior a la media, también tienen importancia ciertas situaciones clínicas. Debido a que la replicación celular está implicada en la transformación cancerosa, las proliferaciones regenerativas, hiperplásicas, y displásicas constituyen un terreno abonado para el origen de una neoplasia maligna.

¹En biología, la morfología es la disciplina encargada del estudio de la reproducción y estructura de un organismo o sistema.

²La diferenciación celular es el proceso, en virtud del cual, las células sufren modificaciones citológicas dando lugar a una forma y una función determinada durante el desarrollo embrionario o la vida de un organismo pluricelular, especializándose en un tipo celular.

³El término anaplasia se utiliza en medicina para describir la escasa diferenciación de las células que componen un tumor.

⁴La metástasis es una teoría científica que supone la propagación de un foco canceroso a un órgano distinto de aquel en que se inició.

⁵En biología, la mitosis es un proceso que ocurre en el núcleo de las células eucariotas y que precede inmediatamente a la división celular, consistente en el reparto equitativo del material hereditario (ADN) característico.

2.2 Breve introducción a la teoría de mezclas

El comportamiento de sistemas complejos, en los cuales diferentes medios continuos interactúan a un nivel microscópico, pueden ser estudiados con la teoría de mezclas. Los primeros trabajos referentes a este acercamiento fueron desarrollados por varios autores, en particular se tienen los trabajos de Truesdell [29], [30], Bowen [31], [32], Green y Naghdi [33], [34] y el volumen confeccionado por Rajagopal y Tao [35].

La premisa básica de la teoría es que el espacio ocupado por una mezcla puede ser considerado ocupado conjuntamente por los varios componentes de la misma, cada uno considerado como un medio continuo. Por tanto, en cada punto del espacio ocupado por la mezcla, existirá una partícula perteneciente a cada componente. La teoría de las mezclas asume que los componentes son lo suficientemente densos de manera tal que puedan homogeneizarse como un continuo. Para cada componente de la mezcla puede definirse, su movimiento, densidad de masa, tensor de tensión, energía, temperatura y otras cantidades físicas, como se hace para un solo medio continuo homogéneo.

Considérese una mezcla formada por N componentes no miscibles (que no se pueden mezclar). El índice α , $\alpha = 1, \dots, N$, indicará el componente α .

Definición 2.1. *El movimiento del α -ésimo componente es descrito a través de la posición ocupada, en el instante t , por la posición $\mathbf{x}_{\alpha 0}$*

$$\mathbf{x} = \chi_{\alpha}(\mathbf{x}_{\alpha 0}, t). \quad (2.1)$$

La relación (2.1) significa que una partícula del α -ésimo componente que actualmente ocupa la posición \mathbf{x} , ha sido llevado desde la posición $\mathbf{x}_{\alpha 0}$ a \mathbf{x} a través del difeomorfismo χ_{α} .

Definición 2.2. *La inversa de χ_{α} se define como*

$$\mathbf{x}_{\alpha 0} = (\chi_{\alpha})^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (2.2)$$

Definición 2.3. *La descripción material de los campos de velocidad y de aceleración del α -ésimo componente se definen de la siguiente forma*

$$\mathbf{v}_{\alpha 0}(\mathbf{x}_{\alpha 0}, t) = \frac{\partial \chi_{\alpha}(\mathbf{x}_{\alpha 0}, t)}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{a}_{\alpha 0}(\mathbf{x}_{\alpha 0}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_{\alpha}(\mathbf{x}_{\alpha 0}, t)}{\partial t}, \quad (2.4)$$

y en la descripción espacial

$$\mathbf{v}_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial \chi_{\alpha}(\mathbf{x}_{\alpha 0}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_{\alpha 0} = (\chi_{\alpha})^{-1}(\mathbf{x}, t)}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{a}_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{v}_{\alpha}(\mathbf{x}_{\alpha 0}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_{\alpha 0} = (\chi_{\alpha})^{-1}(\mathbf{x}, t)}, \quad (2.6)$$

Definición 2.4. *La derivada material actuando sobre el α -ésimo componente de la mezcla, se define de la siguiente forma*

$$\frac{D_{\alpha}(\bullet)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\alpha}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}})(\bullet), \quad (2.7)$$

donde $\nabla_{\mathbf{x}}$ denota el operador gradiente respecto a la posición espacial \mathbf{x} .

Para cada componente se introduce el gradiente de deformación

Definición 2.5. El gradiente de deformación en $(\mathbf{x}_{\alpha 0}, t)$ con respecto a la configuración $\kappa_{\alpha 0}$, se define como la transformación lineal

$$\mathbf{F}_{\alpha} = \nabla_{\mathbf{x}_{\alpha 0}} \chi_{\alpha}(\mathbf{x}_{\alpha 0}, t), \quad (2.8)$$

donde $\nabla_{\mathbf{x}_{\alpha 0}}$ denota el operador de diferenciación respecto a $\mathbf{x}_{\alpha 0}$, es decir, el operador gradiente actuando respecto a $\mathbf{x}_{\alpha 0}$.

Definición 2.6. El gradiente de velocidad relativo al α -ésimo componente de la mezcla es definido como

$$\mathbf{L}_{\alpha} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_{\alpha}(\mathbf{x}, t). \quad (2.9)$$

Aplicando la regla de la cadena y de las definiciones de \mathbf{F}_{α} y $(\mathbf{F}_{\alpha})^{-1}$, el gradiente de velocidad se rescribe como

$$\mathbf{L}_{\alpha} = \dot{\mathbf{F}}_{\alpha}(\mathbf{x}, t) (\mathbf{F}_{\alpha})^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (2.10)$$

La densidad del α -ésimo componente es denotado por ρ_{α} (físicamente ρ_{α} representa la masa del α -ésimo componente por unidad de volumen de la mezcla).

Definición 2.7. La densidad de la mezcla se define por la fórmula

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^N \rho_{\alpha}(\mathbf{x}, t). \quad (2.11)$$

Definición 2.8. La densidad del α -ésimo componente en un estado homogéneo es denotado por ρ_{α}^h y representa la masa del α -ésimo componente por unidad de volumen del α -ésimo componente.

Definición 2.9. La cantidad definida por

$$\phi_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_{\alpha}(\mathbf{x}, t)}{\rho_{\alpha}^h(\mathbf{x}, t)}, \quad (2.12)$$

es la fracción de volumen de la mezcla ocupada por el α -ésimo componente, es decir, el volumen ocupado por el α -ésimo componente sobre el volumen total.

Se asume que se está en presencia de una mezcla saturada¹. Esta suposición implica que

$$\sum_{\alpha=1}^N \phi_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = 1. \quad (2.13)$$

Definición 2.10. La velocidad promedio de la mezcla \mathbf{v} en (\mathbf{x}, t) es definida por

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=1}^N \rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}. \quad (2.14)$$

Definición 2.11. La velocidad de difusión \mathbf{u}_{α} del α -ésimo componente, se define como

$$\mathbf{u}_{\alpha} = \mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}, \quad (2.15)$$

la cual es la velocidad del α -ésimo componente relativo a la velocidad promedio.

Además se define la derivada material para la mezcla

Definición 2.12. La derivada material para la mezcla es

$$\frac{D(\bullet)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}})(\bullet). \quad (2.16)$$

¹Una mezcla saturada compuesta por N componentes es aquella en la cual solo se encuentran estos N componentes y ninguno más.

Producto de (2.7) y (2.15)

$$\frac{D_\alpha(\bullet)}{Dt} - \frac{D(\bullet)}{Dt} = (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{x})(\bullet). \quad (2.17)$$

Con cada componente también está asociado el vector de tracción \mathbf{t}_α (tracción parcial), luego

$$\mathbf{t}_\alpha = (\sigma_\alpha)^T \mathbf{n}. \quad (2.18)$$

Definición 2.13. El vector de tracción de la superficie total es

$$\mathbf{t} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{t}_\alpha. \quad (2.19)$$

De acuerdo a la descripción Euleriana las ecuaciones de balance de masa y de momento lineal, pueden escribirse para el α -ésimo componente de la mezcla como (Rajagopal y Tao [15])

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \mathbf{x} \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = \rho_\alpha \Gamma_\alpha, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial(\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha)}{\partial t} + \nabla \mathbf{x} \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \otimes \mathbf{v}_\alpha) = \nabla \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}_\alpha + \rho_\alpha \mathbf{b} + \mathbf{q}_\alpha + \rho_\alpha \Gamma_\alpha \mathbf{v}_\alpha, \quad (2.21)$$

donde

- . $\rho_\alpha \Gamma_\alpha$ es la proporción de suministro de masa del α -ésimo componente. Este término considera las posibles conversiones de masa entre los componentes.
- . $\boldsymbol{\sigma}_\alpha = (\sigma_\alpha)^T$ es el tensor de Cauchy relativo al α -ésimo componente.
- . \mathbf{q}_α es la fuerza de interacción y está relacionada con las interacciones locales entre los componentes de la mezcla a través de la interface que los separa.

2.2.1 Ecuación de balance de masa para la mezcla

Proposición 2.1. La ecuación de balance de masa para la mezcla es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{x} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.22)$$

Demostración. Si se suma la ecuación (2.20) sobre α , se tiene que

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \nabla \mathbf{x} \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^N \rho_\alpha \Gamma_\alpha, \quad (2.23)$$

usando (2.11) y (2.14),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{x} \cdot (\rho \mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^N \rho_\alpha \Gamma_\alpha. \quad (2.24)$$

Observéese que la ecuación anterior debe tener la misma forma que la correspondiente para un solo componente continuo (ver (1.246)), por tanto se asume que

$$\sum_{\alpha=1}^N \rho_\alpha \Gamma_\alpha = 0. \quad (2.25)$$

Finalmente, se obtiene la ecuación de balance de masa para la mezcla

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{x} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.26)$$

□

2.2.2 Ecuación de balance de momento lineal para la mezcla

Proposición 2.2. *La ecuación de balance de momento lineal para la mezcla es,*

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}. \quad (2.27)$$

Demostración. Procediendo de forma análoga, es decir, sumando sobre α la ecuación (2.21)

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial(\rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha})}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \nabla \mathbf{x} \cdot (\rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \otimes \mathbf{v}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^N \nabla \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N \rho_{\alpha} \mathbf{b} + \sum_{\alpha=1}^N (\rho_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{q}_{\alpha}). \quad (2.28)$$

Utilizando la definición (1.17) del producto tensorial, es posible acomodar el segundo sumando de la ecuación anterior, de forma tal que

$$\sum_{\alpha=1}^N (\rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \otimes \mathbf{v}_{\alpha}) = \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^N (\rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{u}_{\alpha}). \quad (2.29)$$

Luego

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial(\rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha})}{\partial t} + \nabla \mathbf{x} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \nabla \mathbf{x} \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^N \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{u}_{\alpha} \right) + \sum_{\alpha=1}^N \rho_{\alpha} \mathbf{b} + \sum_{\alpha=1}^N (\rho_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{q}_{\alpha}). \quad (2.30)$$

Usando (2.11), (2.14) y definiendo

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^N (\boldsymbol{\sigma}_{\alpha} - \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{u}_{\alpha}), \quad (2.31)$$

se obtiene que

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \mathbf{x} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \nabla \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} + \sum_{\alpha=1}^N (\rho_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{q}_{\alpha}). \quad (2.32)$$

Para seguir simplificando la expresión anterior se demuestra la siguiente proposición

Proposición 2.3. *Se tiene que*

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \mathbf{x} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}). \quad (2.33)$$

Demostración. En efecto, utilizando (1.103) y (1.105)

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \mathbf{x} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \nabla \mathbf{x} \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \nabla \mathbf{x} \rho \quad (2.34)$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\nabla \mathbf{x} \mathbf{v}) \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} (\nabla \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \nabla \mathbf{x} \rho. \quad (2.35)$$

Haciendo uso de la fórmula (1.16), la cual define el producto tensorial

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \nabla \mathbf{x} \rho = \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{x} \rho). \quad (2.36)$$

La ecuación de balance de masa para la mezcla (2.22), puede describirse de la siguiente forma teniendo en cuenta la relación (1.102)

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{x} \rho + \rho (\nabla \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) = 0. \quad (2.37)$$

Combinando (2.37) con (2.35), se obtiene la relación buscada

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla\mathbf{x} \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\nabla\mathbf{x}\mathbf{v})\mathbf{v}. \quad (2.38)$$

Es decir

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla\mathbf{x} \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}). \quad (2.39)$$

□

La proposición 2.3, permite escribir la ecuación (2.32) de la siguiente forma

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b} + \sum_{\alpha=1}^N (\rho_\alpha \Gamma_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \mathbf{q}_\alpha). \quad (2.40)$$

La ecuación (2.40) debe tener la misma forma que la correspondiente para un solo componente continuo (ver (1.271)), por tanto se asume que

$$\sum_{\alpha=1}^N (\rho_\alpha \Gamma_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \mathbf{q}_\alpha) = 0. \quad (2.41)$$

Finalmente, la ecuación de balance de momento lineal para la mezcla es,

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b}. \quad (2.42)$$

□

2.3 Breve introducción a la teoría de múltiples configuraciones naturales

La teoría de múltiples configuraciones naturales constituye un escenario ideal para investigar el crecimiento de un tumor. De hecho, la dificultad esencial para formalizar la dinámica de crecimiento, es modelar simultáneamente el cambio en la masa y las tensiones que acompañan a dicho cambio, posiblemente causadas por el crecimiento en sí o por la aplicación de fuerzas. Dicha teoría posibilita separar tales contribuciones y modelar cada una individualmente.

Existen muchos cuerpos que son capaces de estar libres de tensión en más de una configuración. Por ejemplo en sólidos sufriendo deformaciones plásticas, se pueden asociar un conjunto de configuraciones libres de tensión asociadas a la configuración actual del material (Rajagopal y Srinivasa [36]). Eckart (Eckart [37]) fue uno de los primeros investigadores que estudiaron las consecuencias asociadas a un cuerpo sólido con más de una configuración libre de tensión. El hecho de que un cuerpo puede poseer una configuración libre de tensión y la evolución de esta configuración juega un papel especial a la hora de caracterizar su comportamiento material. Con el objetivo de distinguir claramente las distintas configuraciones que surgen en el estudio de un cuerpo elástico, se introduce el concepto de configuración natural. Esta es la configuración de referencia elegida para representar la respuesta elástica del material y constituye la configuración de interés del presente estudio.

Se asume que el material posee la propiedad de **elasticidad instantánea**, es decir, para una clase especial de procesos (aquellos que ocurran en tiempos sumamente pequeños) y que sean no disipativos (en el sentido de que el trabajo mecánico no se transfiera como energía térmica) se engendra una respuesta elástica para el material. Considérese entonces el movimiento de una partícula genérica del α -ésimo componente desde su configuración de referencia κ_α^0 , la cual se asumirá que está libre de tensión. Considere el movimiento χ_α del α -ésimo componente desde la configuración de referencia κ_α^0 a la configuración actual κ_α^t . Manteniendo la masa constante, se lleva “instantáneamente” al material (cuando su configuración actual es κ_α^t) a un estado libre de tensión, debido a su respuesta elástica, a través de un proceso no disipativo.

Definición 2.14. A esta configuración libre de tensión alcanzado por el material se le denomina **configuración natural** y se denota por $\kappa_\alpha^{\text{el}(t)}$.

La configuración natural es una configuración en general diferente a la asociada con la configuración de referencia κ_α^0 , así como a la asociada con la configuración actual κ_α^t . Note además que la configuración natural $\kappa_\alpha^{\text{el}(t)}$ (a la cual por simplicidad se denotará por $\kappa_\alpha^{\text{el}}$) asociada con la configuración actual κ_α^t depende del instante de tiempo t .

La deformación que sufre el cuerpo desde la configuración natural $\kappa_\alpha^{\text{el}}$ a κ_α^t se puede medir a través del gradiente de deformación $\mathbf{F}_\alpha^{\text{el}}$, mientras que el movimiento de κ_α^0 a la configuración $\kappa_\alpha^{\text{el}}$, puede ser descrito como un camino de crecimiento rígido y será descrito por el tensor \mathbf{G}_α (ver fig. 2.1).

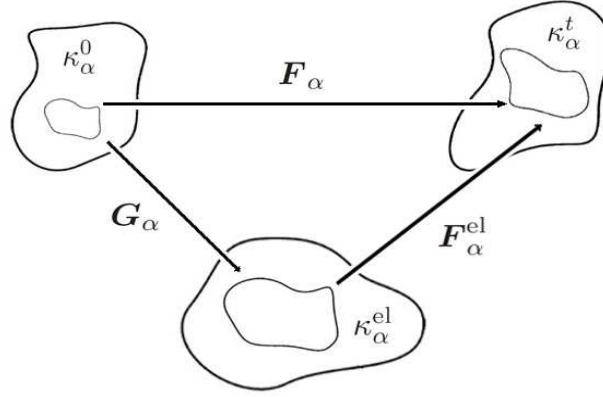


Figura 2.1: Configuraciones del cuerpo.

Entonces se tiene la siguiente descomposición:

$$\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^{\text{el}} \mathbf{G}_\alpha. \quad (2.43)$$

Obsérvese que, como la masa se preserva a lo largo del camino de $\kappa_\alpha^{\text{el}}$ a κ_α^t , el tensor $\mathbf{F}_\alpha^{\text{el}}$ no está directamente relacionado con el crecimiento, pero sí está relacionado con la tensión que actúa sobre el material, mientras que el tensor \mathbf{G}_α está directamente relacionado con el crecimiento y por tanto se denominará **tensor de crecimiento**. Luego, se han separado las contribuciones de puro crecimiento y de deformación induciendo tensión. El tensor $\mathbf{F}_\alpha^{\text{el}}$ indica como el cuerpo se deforma localmente al pasar de la configuración natural $\kappa_\alpha^{\text{el}}$ a la κ_α^t , mientras que \mathbf{G}_α indica como el cuerpo está creciendo localmente de κ_α^0 a $\kappa_\alpha^{\text{el}}$. Se conoce de resultados anteriores que el gradiente de deformación es inversible, de (2.43) se tiene que, tanto $\mathbf{F}_\alpha^{\text{el}}$ como \mathbf{G}_α son también inversibles. Note que salvo algunos casos muy especiales (movimientos homogéneos) la configuración natural no constituye una configuración compatible, en el sentido de que no puede ser un estado físico. Por tanto no es posible disponer del cálculo diferencial e integral en un cuerpo que es incompatible con la métrica Euclidiana. Este inconveniente puede ser sobrepasado considerando cada punto material independientemente y construyendo movimientos homogéneos ficticios del cuerpo, de tal forma que el gradiente de deformación asociado al movimiento ficticio coincida con el gradiente de deformación del movimiento actual en el punto material en cuestión para cada instante de tiempo. Para este movimiento ficticio es posible construir el tensor \mathbf{G}_α que identifica a la configuración natural. Para un análisis más detallado el lector puede referirse a Rajagopal y Srinivasa [38].

Sea $\rho_{\alpha 0}(\mathbf{x}_{\alpha 0}) = \rho((\chi_\alpha)^{-1}(\mathbf{x}, t), 0)$ el campo de densidad del α -ésimo componente en el instante $t = 0$. Entonces, si se denota por $dV_{\alpha 0}$ el volumen ocupado por una partícula genérica del α -ésimo componente en la configuración de referencia κ_α^0 en el instante $t = 0$, la masa inicial de la partícula estará dada por

$$dm_{\alpha 0} = \rho_{\alpha 0}(\mathbf{x}_{\alpha 0}) dV_{\alpha 0}. \quad (2.44)$$

De forma análoga, si dV_α denota el volumen ocupado por una partícula genérica del α -ésimo componente en la configuración actual κ_α^t , la masa actual de la partícula es

$$dm_\alpha = \rho_\alpha(\mathbf{x}, t) dV_\alpha. \quad (2.45)$$

En lo que hemos realizado hasta el momento, se ha asumido que la configuración natural alcanzada por la relajación de la configuración actual es única para cada instante de tiempo t . Esta es una condición necesaria para el desarrollo de esta teoría y una de sus consecuencias es que el campo de densidad en la configuración natural es idéntico al campo de densidad en la configuración original de referencia. Entonces, denotando por dV_α^{el} el volumen ocupado por la misma partícula en la configuración de referencia, la masa de la partícula en la configuración de referencia estará dada por

$$dm_\alpha = \rho_{\alpha 0}(\mathbf{x}_{\alpha 0}) dV_\alpha^{\text{el}}. \quad (2.46)$$

Como la masa se preserva de $\kappa_\alpha^{\text{el}}$ a κ_α^t y utilizando las relaciones (1.189), (2.44) y (2.46)

$$J_{\mathbf{G}_\alpha} = \det \mathbf{G}_\alpha = \frac{dV_\alpha^{\text{el}}}{dV_{\alpha 0}} = \frac{dm_\alpha}{dm_{\alpha 0}}. \quad (2.47)$$

El tensor \mathbf{G}_α es entonces suficiente para saber si existe crecimiento o decrecimiento, por lo que se llamará **tensor de crecimiento**.

El teorema de descomposición polar puede ser aplicado al tensor de crecimiento \mathbf{G}_α ; luego existe un único tensor de rotación $\mathbf{R}_{\mathbf{G}_\alpha}$ y un único tensor simétrico $\mathbf{U}_{\mathbf{G}_\alpha}$ tal que

$$\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{R}_{\mathbf{G}_\alpha} \mathbf{U}_{\mathbf{G}_\alpha}. \quad (2.48)$$

De la arbitrariedad de la elección de la configuración natural, se pueden escoger los tensores en (2.48) de forma tal que $\mathbf{R}_{\mathbf{G}_\alpha} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{U}_{\mathbf{G}_\alpha}$. De esta manera, se asume que \mathbf{G}_α es un tensor simétrico y definido positivo. Si se adopta la suposición de que el crecimiento ocurre de igual forma en todas las direcciones (crecimiento isotrópico), se puede definir

$$\mathbf{G}_\alpha = g_\alpha \mathbf{I}, \quad (2.49)$$

donde a g_α se le denomina función de crecimiento.

2.4 Crecimiento de un tumor como un medio homogéneo

Se considera para el estudio, un tumor asumido como un sólido continuo. Tomando las siguientes consideraciones:

- Las contribuciones de la teoría de mezclas son utilizadas, tomando como caso particular un medio sólido y homogéneo.
- Se emplea la teoría de múltiples configuraciones naturales, la cual habilita el uso del acercamiento Lagrangiano para estudiar el problema de crecimiento, además de permitir modelar simultáneamente el cambio en masa y las tensiones que acompañan a dicho cambio.
- Se modela el cuerpo en forma esférica, dicha forma es la observada en los experimentos realizados por Helmlinger et al. [39].
- Se asume que el cuerpo no rota.
- El crecimiento es entendido como el crecimiento de la masa del cuerpo y no como el aumento del número de células, asimismo dicho crecimiento se supone isotrópico y no homogéneo.
- El sólido se asume compresible.

- La respuesta del cuerpo es hiperelástica.
- Se considera que existen dos maneras en que la energía es suministrada al sistema: trabajo de fuerzas externas que están en balance con las internas y energía proveída específicamente para el crecimiento.
- La contribución de los nutrientes en el desarrollo del cuerpo es tomada en cuenta, los cuales se suponen distribuidos uniformemente en la frontera del material; mientras que en el interior del tumor se están difundiendo y siendo absorbidos.

2.4.1 Relaciones geométricas

Es apropiado describir el problema en cuestión usando coordenadas esféricas,

$$x_1 = r \cos \theta \cos \phi, \quad x_2 = r \cos \theta \sin \phi, \quad x_3 = r \sin \theta, \quad (2.50)$$

donde $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, $-\pi \leq \phi < \pi$ y $r > 0$. Por tanto, la posición \mathbf{x} se puede escribir como $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = r(\cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_{x_1} + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_{x_2} + \sin \theta \mathbf{e}_{x_3})$.

Los vectores tangentes a las curvas coordenadas de este sistema definidos por

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} = \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \sin \theta \mathbf{e}_z, \quad (2.51)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} = r(-\cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_y), \quad (2.52)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = r(-\sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x - \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z), \quad (2.53)$$

forman una base ortogonal. Para futuros cálculos es más cómodo trabajar con la base ortonormalizada, luego

$$\mathbf{e}_r^* = \frac{\mathbf{e}_r}{\sqrt{\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \sin^2 \theta}} = \mathbf{e}_r, \quad (2.54)$$

$$\mathbf{e}_\theta^* = \frac{\mathbf{e}_\theta}{\sqrt{r^2(\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta)}} = -\sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_{x_1} - \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_{x_2} + \cos \theta \mathbf{e}_{x_3} = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta, \quad (2.55)$$

$$\mathbf{e}_\phi^* = \frac{\mathbf{e}_\phi}{\sqrt{r^2(\cos^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta \cos^2 \phi)}} = -\sin \phi \mathbf{e}_{x_1} + \cos \phi \mathbf{e}_{x_2} = \frac{1}{r \cos \theta} \mathbf{e}_\phi. \quad (2.56)$$

Para hacer más simple la notación, se suprime el supraíndice “*” en el trabajo con la base ortonormal (2.54)-(2.56).

Las derivadas de la base ortonormal respecto a r , θ y ϕ , las cuales serán de utilidad en lo adelante, son

$$\mathbf{e}_{r,r} = 0, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{e}_{r,\phi} = -\cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_{x_1} + \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_{x_2} = \cos \theta \mathbf{e}_\phi, \quad (2.58)$$

$$\mathbf{e}_{r,\theta} = -\sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_{x_1} - \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_{x_2} + \cos \theta \mathbf{e}_{x_3} = \mathbf{e}_\theta, \quad (2.59)$$

$$\mathbf{e}_{\phi,r} = 0, \quad (2.60)$$

$$\mathbf{e}_{\phi,\phi} = -\cos \phi \mathbf{e}_{x_1} - \sin \phi \mathbf{e}_{x_2} = -\cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad (2.61)$$

$$\mathbf{e}_{\phi,\theta} = 0, \quad (2.62)$$

$$\mathbf{e}_{\theta,r} = 0, \quad (2.63)$$

$$\mathbf{e}_{\theta,\phi} = \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_{x_1} - \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_{x_2} = -\sin \theta \mathbf{e}_\phi, \quad (2.64)$$

$$\mathbf{e}_{\theta,\theta} = -\cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_{x_1} - \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_{x_2} - \sin \theta \mathbf{e}_{x_3} = -\mathbf{e}_r. \quad (2.65)$$

En el movimiento del cuerpo, los puntos materiales se mueven solo en dirección radial (pues el cuerpo no rota) manteniendo θ y ϕ constante. De aquí que se tome

$$r(r_0, t) = c(r_0, t)r_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \phi = \phi_0, \quad (2.66)$$

donde el subíndice “0” indica la coordenada material, es decir, una partícula originalmente en (r_0, θ_0, ϕ_0) (configuración de referencia) ocupa la posición (r, θ_0, ϕ_0) en la posición actual. Además se denotará por R el radio inicial del tumor.

Proposición 2.4. *Los operadores nabla y de Laplace en las coordenadas esféricas consideradas son*

$$\nabla \mathbf{x}_0(\bullet) = \frac{(\bullet)'}{r'} \mathbf{e}_r, \quad (2.67)$$

$$\Delta \mathbf{x}_0(\bullet) = \frac{(\bullet)''}{(r')^2} - \frac{(\bullet)'r''}{(r')^3} + \frac{2(\bullet)'}{r r'}. \quad (2.68)$$

Demostración. El operador cartesiano ∇ en coordenadas esféricas es obtenido utilizando la regla de la cadena,

$$\nabla \mathbf{x}(\bullet) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_i} \mathbf{e}_i, \quad (2.69)$$

$$\nabla \mathbf{x}(\bullet) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\bullet)}{\partial s_j} \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i, \quad s_1 = r, \quad s_2 = \phi, \quad s_3 = \theta. \quad (2.70)$$

Las derivadas $\partial s_j / \partial x_i$ se obtienen de la transformación de coordenadas (2.50), por ejemplo

$$\frac{\partial s_3}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^{-1} = -(r \sin \theta \sin \phi)^{-1}. \quad (2.71)$$

Por tanto

$$\nabla \mathbf{x}(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi, \quad (2.72)$$

pero

$$\frac{\partial}{\partial r} = (r')^{-1} \frac{\partial}{\partial r_0}, \quad (2.73)$$

donde “prima” indica, derivada respecto a r_0 . Entonces en las coordenadas materiales

$$\nabla \mathbf{x}_0(\bullet) = \frac{1}{r'} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r_0} \mathbf{e}_{r_0} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \theta_0} \mathbf{e}_{\theta_0} + \frac{1}{r_0 \cos \theta_0} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \phi_0} \mathbf{e}_{\phi_0}. \quad (2.74)$$

Pero de la suposición de que el cuerpo no rota, de la normalización de la base, la ecuación (2.74) se reduce a

$$\nabla \mathbf{x}_0(\bullet) = \frac{1}{r'} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r_0} \mathbf{e}_{r_0}. \quad (2.75)$$

El operador cartesiano Δ en coordenadas esféricas es obtenido de forma análoga, obteniendo

$$\Delta \mathbf{x}(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r}. \quad (2.76)$$

donde

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = (r')^{-1} \frac{\partial}{\partial r_0} \left((r')^{-1} \frac{\partial}{\partial r_0} \right) \quad (2.77)$$

$$= (r')^{-1} \left((r')^{-1} \frac{\partial^2}{\partial r_0^2} - \frac{r''}{(r')^2} \frac{\partial}{\partial r_0} \right) \quad (2.78)$$

$$= (r')^{-2} \frac{\partial^2}{\partial r_0^2} - \frac{r''}{(r')^3} \frac{\partial}{\partial r_0}, \quad (2.79)$$

es decir,

$$\Delta \mathbf{x}_0(\bullet) = (r')^{-2} \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial r_0^2} - \frac{r''}{(r')^3} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r_0} + \frac{2}{rr'} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r_0}. \quad (2.80)$$

Luego se puede resumir que

$$\nabla \mathbf{x}_0(\bullet) = \frac{(\bullet)'}{r'} \mathbf{e}_r, \quad (2.81)$$

$$\Delta \mathbf{x}_0(\bullet) = \frac{(\bullet)''}{(r')^2} - \frac{(\bullet)'r''}{(r')^3} + \frac{2}{r} \frac{(\bullet)'}{r'}. \quad (2.82)$$

□

2.4.2 Ecuaciones de balance

2.4.2.1 Balance de masa

Según la teoría de mezclas la ecuación de balance de masa en la descripción Euleriana para un solo componente, está dada por la fórmula (2.20). Pero como se indicó anteriormente la introducción de la teoría de múltiples configuraciones naturales habilita el uso del acercamiento Lagrangiano para estudiar el problema de crecimiento. Luego se busca la forma de dicha ecuación en la configuración natural.

Proposición 2.5. *La ecuación de balance de masa en la configuración natural es*

$$\rho_0 = \rho J^{\text{el}}. \quad (2.83)$$

Demostración. Como la masa se conserva de la configuración natural a la configuración actual,

$$dm = \rho_0 dV^{\text{el}} = \rho dV. \quad (2.84)$$

Usando (2.47) se tiene que

$$\rho_0 J_{\mathbf{G}} dV_0 = \rho J dV_0. \quad (2.85)$$

Definiendo

$$J^{\text{el}} = \det \mathbf{F}^{\text{el}}, \quad (2.86)$$

y como $J = J^{\text{el}} J_{\mathbf{G}}$,

$$\rho_0 = \rho J^{\text{el}}. \quad (2.87)$$

□

Observe que la ecuación (2.83) está en correspondencia con la ecuación de balance de masa (1.240), pues

$$\overbrace{(\rho J^{\text{el}})}^{\cdot} = 0. \quad (2.88)$$

La ecuación que surge producto de la siguiente proposición será de suma importancia a la hora de relacionar tensiones y crecimiento.

Proposición 2.6. *Sea \mathbf{G} el tensor que indica como el cuerpo está creciendo localmente de κ^0 a κ^{el} , entonces*

$$\Gamma = \text{tr} \left(\dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} \right). \quad (2.89)$$

Demostración. De (2.83)

$$\rho_0 J_{\mathbf{G}} = \rho J, \quad (2.90)$$

derivando la relación anterior

$$\rho_0 \dot{J}_{\mathbf{G}} = \frac{D}{Dt} (\rho J). \quad (2.91)$$

Por otro lado usando la fórmula (1.102), la ecuación (2.20) puede describirse de la siguiente forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{x} \rho = \rho \Gamma, \quad (2.92)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{x})(\rho) = -\rho \operatorname{tr} \mathbf{L} + \rho \Gamma, \quad (2.93)$$

pero, de la ecuación (2.10) y las relaciones (1.81) y (1.148)

$$\operatorname{tr} \mathbf{L} = \operatorname{tr} (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) \quad (2.94)$$

$$= \dot{\mathbf{F}} : (\mathbf{F})^{-T} \quad (2.95)$$

$$= \dot{J} \frac{1}{J}, \quad (2.96)$$

donde $J = \det \mathbf{F}$. Luego, la ecuación de balance de masa (2.20) se transforma en la forma equivalente

$$J \frac{D\rho}{Dt} + \rho \dot{J} = \Gamma \rho J, \quad (2.97)$$

$$\frac{D}{Dt} (\rho J) = \Gamma \rho J. \quad (2.98)$$

Sustituyendo el miembro derecho de (2.91) por (2.98) se obtiene,

$$\rho_0 \dot{J}_{\mathbf{G}} = \Gamma \rho J, \quad (2.99)$$

pero como $J = J^{\text{el}} J_{\mathbf{G}}$ y de la relación (2.83)

$$\rho_0 \dot{J}_{\mathbf{G}} = \Gamma \rho_0 J_{\mathbf{G}}, \quad (2.100)$$

$$\Gamma = \dot{J}_{\mathbf{G}} (J_{\mathbf{G}})^{-1}, \quad (2.101)$$

por tanto

$$\Gamma = \operatorname{tr} (\dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1}). \quad (2.102)$$

□

2.4.2.2 Balance de momento lineal

Como se expuso anteriormente, en un material hiperelástico, la energía de deformación ψ está completamente determinada como una función diferenciable del gradiente de deformación. Se pueden encontrar varias propuestas para energías de deformación en la literatura. En el presente trabajo se utiliza la energía de deformación de Ciarlet (Bertram [40]),

$$\psi = \frac{\lambda^*}{4} (III_{\mathbf{B}} - \ln III_{\mathbf{B}} - 1) + \frac{\mu^*}{2} (I_{\mathbf{B}} - \ln III_{\mathbf{B}} - 3), \quad (2.103)$$

donde λ^* y μ^* se denominan constantes de Lamé.

El tensor de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, se obtiene de (2.103) de la siguiente manera

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B}. \quad (2.104)$$

Luego, con el objetivo de obtener (2.104), se hace necesario calcular la forma explícita del gradiente de deformación \mathbf{F} ,

$$\mathbf{F} = \mathbf{x} \otimes \nabla \mathbf{x}_0 \quad (2.105)$$

$$= r(r_0) \mathbf{e}_r \otimes \left(\frac{\partial}{\partial r_0} \mathbf{e}_{r_0} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \theta_0} \mathbf{e}_{\theta_0} + \frac{1}{r_0 \cos \theta_0} \frac{\partial}{\partial \phi_0} \mathbf{e}_{\phi_0} \right) \quad (2.106)$$

$$= \frac{\partial(r(r_0) \mathbf{e}_r)}{\partial r_0} \otimes \mathbf{e}_{r_0} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial(r(r_0) \mathbf{e}_r)}{\partial \theta_0} \otimes \mathbf{e}_{\theta_0} + \frac{1}{r_0 \cos \theta} \frac{\partial(r(r_0) \mathbf{e}_r)}{\partial \phi_0} \otimes \mathbf{e}_{\phi_0}, \quad (2.107)$$

por lo tanto

$$\mathbf{F} = r' \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_{r_0} + \frac{r}{r_0} (\mathbf{e}_{r, \theta_0} \otimes \mathbf{e}_{\theta_0} + \frac{1}{\cos \theta_0} \mathbf{e}_{r, \phi_0} \otimes \mathbf{e}_{\phi_0}). \quad (2.108)$$

Pero como se ha considerado que $\theta = \theta_0$ y $\phi = \phi_0$, se puede reemplazar las derivadas por las correspondientes calculadas en la sección anterior (2.57)-(2.65), además, se puede reemplazar \mathbf{e}_{r_0} por \mathbf{e}_r . Luego, el gradiente de deformación \mathbf{F} toma la siguiente forma,

$$\mathbf{F} = r' \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{r}{r_0} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi), \quad (2.109)$$

o en forma matricial

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} r' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{r_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{r_0} \end{pmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad i, j = r, \phi, \theta. \quad (2.110)$$

De (1.191) se deduce que

$$\mathbf{B} = (r')^2 \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{r^2}{r_0^2} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi), \quad (2.111)$$

Proposición 2.7. *El tensor de tensión de Cauchy en la configuración actual es*

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \left(\mu^* (\mathbf{B} - \mathbf{I}) + \frac{\lambda^*}{2} (\text{III} \mathbf{B} - 1) \mathbf{I} \right), \quad (2.112)$$

Demostración. Expandiendo la derivada en la expresión (2.104) por medio de la regla de la cadena, se obtiene

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\partial \psi}{\partial I_{\mathbf{B}}} \frac{\partial I_{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{B}} + \frac{\partial \psi}{\partial \text{III} \mathbf{B}} \frac{\partial \text{III} \mathbf{B}}{\partial \mathbf{B}}, \quad (2.113)$$

donde

$$\frac{\partial I_{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial \text{III} \mathbf{B}}{\partial \mathbf{B}} = \text{III} \mathbf{B} \mathbf{B}^{-T}. \quad (2.114)$$

Entonces $\boldsymbol{\sigma}$ adopta la siguiente forma

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_{\mathbf{B}}} \frac{\partial I_{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{B}} + \frac{\partial \psi}{\partial \text{III} \mathbf{B}} \frac{\partial \text{III} \mathbf{B}}{\partial \mathbf{B}} \right) \mathbf{B} \quad (2.115)$$

$$= 2\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_{\mathbf{B}}} \mathbf{I} + \frac{\partial \psi}{\partial \text{III} \mathbf{B}} \text{III} \mathbf{B} \mathbf{B}^{-T} \right) \mathbf{B} \quad (2.116)$$

$$= 2\rho \left(\frac{\mu^*}{2} \mathbf{I} + \frac{\lambda^*}{4} (\text{III} \mathbf{B} - 1) \mathbf{B}^{-T} - \frac{\mu^*}{2} \mathbf{B}^{-T} \right) \mathbf{B}. \quad (2.117)$$

Finalmente

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \left(\mu^* (\mathbf{B} - \mathbf{I}) + \frac{\lambda^*}{2} (\text{III} \mathbf{B} - 1) \mathbf{I} \right). \quad (2.118)$$

□

Pero como se indicó anteriormente se prefiere la configuración natural para el estudio del problema de crecimiento.

Proposición 2.8. *El tensor de tensión de Cauchy en la configuración natural es*

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{el}} = \sigma_{rr}^{\text{el}} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi), \quad (2.119)$$

donde

$$\sigma_{rr}^{\text{el}} = \frac{1}{\sqrt{\text{III} \mathbf{B}^{\text{el}}}} \left(\mu \left(\frac{r'}{g^2} - 1 \right) + \frac{\lambda}{2} (\text{III} \mathbf{B}^{\text{el}} - 1) \right), \quad (2.120)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{\text{el}} = \frac{1}{\sqrt{\text{III} \mathbf{B}^{\text{el}}}} \left(\mu \left(\frac{r^2}{g^2 r_0^2} - 1 \right) + \frac{\lambda}{2} (\text{III} \mathbf{B}^{\text{el}} - 1) \right). \quad (2.121)$$

Demostración. Usando (2.83), se puede reemplazar

$$\rho = \frac{\rho_0}{J^{\text{el}}}, \quad (2.122)$$

donde

$$J^{\text{el}} = \det(\mathbf{F}^{\text{el}}) = \text{III} \mathbf{F}^{\text{el}} = \sqrt{\text{III} \mathbf{B}^{\text{el}}}. \quad (2.123)$$

Pero en la sección 2.3 se asume que el tensor simétrico y definido positivo \mathbf{G} , tiene la siguiente forma $\mathbf{G} = g\mathbf{I}$ (crecimiento isotrópico). Por tanto

$$J^{\text{el}} = \frac{r' r^2}{g^3 r_0^2}. \quad (2.124)$$

La ecuación para $\boldsymbol{\sigma}$ puede reescribirse en la configuración natural κ_{el} , gracias a la relación

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\text{el}} \mathbf{G}, \quad (2.125)$$

entonces haciendo $\rho_0 \mu^* = \mu$ y $\rho_0 \lambda^* = \lambda$,

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{el}} = \frac{1}{J^{\text{el}}} \left(\mu (\mathbf{B}^{\text{el}} - \mathbf{I}) + \frac{\lambda}{2} ((J^{\text{el}})^2 - 1) \mathbf{I} \right), \quad \mathbf{B}^{\text{el}} = \mathbf{F}^{\text{el}} (\mathbf{F}^{\text{el}})^T, \quad (2.126)$$

donde

$$\mathbf{F}^{\text{el}} = \mathbf{F} \mathbf{G}^{-1} = g^{-1} r' \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + g^{-1} \frac{r}{r_0} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi), \quad (2.127)$$

y como consecuencia

$$\mathbf{B}^{\text{el}} = g^{-2} (r')^2 \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + g^{-2} \frac{r^2}{r_0^2} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi). \quad (2.128)$$

Luego,

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{el}} = \sigma_{rr}^{\text{el}} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi), \quad (2.129)$$

donde

$$\sigma_{rr}^{\text{el}} = \frac{1}{\sqrt{\text{III} \mathbf{B}^{\text{el}}}} \left(\mu \left(\frac{r'}{g^2} - 1 \right) + \frac{\lambda}{2} (\text{III} \mathbf{B}^{\text{el}} - 1) \right), \quad (2.130)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{\text{el}} = \frac{1}{\sqrt{\text{III} \mathbf{B}^{\text{el}}}} \left(\mu \left(\frac{r^2}{g^2 r_0^2} - 1 \right) + \frac{\lambda}{2} (\text{III} \mathbf{B}^{\text{el}} - 1) \right). \quad (2.131)$$

□

El objetivo de esta subsección es obtener completamente la ecuación de balance de momento lineal para un solo componente utilizando la teoría de mezclas, la cual debido a que no hay interacciones ($\mathbf{q} = 0$) toma la forma

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla\mathbf{x} \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \nabla\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b} + \rho\Gamma\mathbf{v}. \quad (2.132)$$

Proposición 2.9. La ecuación de balance de momento lineal (2.132) se describe en la forma equivalente

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b}. \quad (2.133)$$

Demostración. Utilizando (1.103) y (1.105)

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla\mathbf{x} \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathbf{v} + \rho \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho\nabla\mathbf{x} \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \nabla\mathbf{x}\rho \quad (2.134)$$

$$= \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathbf{v} + \rho \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\nabla\mathbf{x}\mathbf{v})\mathbf{v} + \rho\mathbf{v}(\nabla\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{x}\rho). \quad (2.135)$$

Pero la ecuación de balance de masa (2.20) toma la siguiente forma teniendo en cuenta la relación (1.102)

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{x}\rho + \rho(\nabla\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) = \rho\Gamma. \quad (2.136)$$

Combinando (2.136) con (2.135), se obtiene

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla\mathbf{x} \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\nabla\mathbf{x}\mathbf{v})\mathbf{v} + \rho\Gamma\mathbf{v}. \quad (2.137)$$

Es decir,

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b}. \quad (2.138)$$

□

Proposición 2.10. La ecuación de balance (2.133) toma la siguiente forma

$$\frac{(\sigma_{rr}^{\text{el}})'}{r'} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr}^{\text{el}} - \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}}) + \rho b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0. \quad (2.139)$$

Demostración. Haciendo uso de la definición del producto tensorial, las propiedades de las bases ortonormales (2.54)-(2.56) y las relaciones (2.57)-(2.65)

$$\begin{aligned} \nabla\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{el}} = & \sigma_{rr,r}^{\text{el}}(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r + \sigma_{rr}^{\text{el}}(\mathbf{e}_{r,r} \otimes \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r + \sigma_{rr}^{\text{el}}(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_{r,r})\mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}}(\mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi)\mathbf{e}_r + \\ & + \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}}(\mathbf{e}_{\phi,r} \otimes \mathbf{e}_\phi)\mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}}(\mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_{\phi,r})\mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta,r}^{\text{el}}(\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta)\mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}}(\mathbf{e}_{\theta,r} \otimes \mathbf{e}_\theta)\mathbf{e}_r + \\ & + \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}}(\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_{\theta,r})\mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\sigma_{rr,\theta}^{\text{el}}(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_\theta + \sigma_{rr}^{\text{el}}(\mathbf{e}_{r,\theta} \otimes \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_\theta + \sigma_{rr}^{\text{el}}(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_{r,\theta})\mathbf{e}_\theta + \right. \\ & + \sigma_{\theta\theta,\theta}^{\text{el}}(\mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi)\mathbf{e}_\theta + \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}}(\mathbf{e}_{\phi,\theta} \otimes \mathbf{e}_\phi)\mathbf{e}_\theta + \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}}(\mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_{\phi,\theta})\mathbf{e}_\theta + \sigma_{\theta\theta,\theta}^{\text{el}}(\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta)\mathbf{e}_\theta + \\ & \left. + \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}}(\mathbf{e}_{\theta,\theta} \otimes \mathbf{e}_\theta)\mathbf{e}_\theta + \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}}(\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_{\theta,\theta})\mathbf{e}_\theta \right) + \frac{1}{r \cos \theta} \left(\sigma_{\theta\theta,\phi}^{\text{el}}(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_\phi + \right. \\ & + \sigma_{rr}^{\text{el}}(\mathbf{e}_{r,\phi} \otimes \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_\phi + \sigma_{rr}^{\text{el}}(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_{r,\phi})\mathbf{e}_\phi + \sigma_{\theta\theta,\phi}^{\text{el}}(\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta)\mathbf{e}_\phi + \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}}(\mathbf{e}_{\theta,\phi} \otimes \mathbf{e}_\theta)\mathbf{e}_\phi + \\ & \left. + \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}}(\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_{\theta,\phi})\mathbf{e}_\phi + \sigma_{\theta\theta,\phi}^{\text{el}}(\mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi)\mathbf{e}_\phi + \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}}(\mathbf{e}_{\phi,\phi} \otimes \mathbf{e}_\phi)\mathbf{e}_\phi + \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}}(\mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_{\phi,\phi})\mathbf{e}_\phi \right), \quad (2.140) \end{aligned}$$

es decir,

$$\nabla\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{el}} = \left[\sigma_{rr,r}^{\text{el}} + \frac{2}{r}\sigma_{rr}^{\text{el}} - \frac{1}{r}\sigma_{\theta\theta}^{\text{el}} - \frac{1}{r}\sigma_{\theta\theta}^{\text{el}} \right] \mathbf{e}_r, \quad (2.141)$$

luego aplicando la fórmula (2.67)

$$\nabla \mathbf{x}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{el}} = \left[\frac{(\sigma_{rr}^{\text{el}})'}{r'} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr}^{\text{el}} - \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}}) \right] \mathbf{e}_r. \quad (2.142)$$

En el caso de los tejidos biológicos, las velocidades son tan pequeñas que se pueden excluir los términos inerciales. Entonces la ecuación (2.133), puede reescribirse como

$$\nabla \mathbf{x}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{el}} + \rho \mathbf{b} = 0, \quad (2.143)$$

es decir, (2.143) se transforma en el sistema

$$\frac{(\sigma_{rr}^{\text{el}})'}{r'} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr}^{\text{el}} - \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}}) + \rho b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0. \quad (2.144)$$

□

La existencia y unicidad de un problema de contorno para la ecuación (2.139) se analizará más adelante (subsección 2.4.7).

2.4.3 Principio de disipación de la energía

En esta subsección se mostrará cómo el análisis de una relación que tiene sus principios en la inecuación de Clausius-Planck (Holzapfel [28]) conduce a relaciones constitutivas que, en adición a los principios clásicos de la Mecánica de Medios Continuos, proporciona un acoplamiento directo entre la tensión y el crecimiento.

De acuerdo a Ambrosi y Guana [41], en el presente contexto se ignora la energía térmica y se considera que existen dos maneras en que la energía es suministrada al sistema: trabajo de fuerzas externas que están en balance con las internas y energía proveída específicamente para el crecimiento (esta energía puede derivarse del consumo de nutrientes). La energía suministrada al sistema por estas vías, será a lo sumo almacenada como energía mecánica. Entonces se escribe el siguiente principio de disipación (Ambrosi y Guana [41]),

$$(J\rho\dot{\psi}) \leq J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{L} + J\xi, \quad (2.145)$$

donde ψ es la energía libre por unidad de masa del cuerpo y ξ es la energía por unidad de tiempo suministrada externamente para el crecimiento. Bajo deformaciones isotérmicas la energía libre por unidad de masa del cuerpo es identificada por la energía de deformación, luego $\psi = \psi(\mathbf{F}^{\text{el}})$ (Taber [27]).

La investigación de (2.145) conduce a una relación constitutiva que describe el acoplamiento entre la tensión y el crecimiento. Adoptando el procedimiento propuesto por Di Carlo y Quiligotti [42], ésta inecuación es efectiva cuando se admite que la energía para el crecimiento es suministrada de forma externa como el trabajo de algún tipo de fuerzas que gobiernan el proceso de crecimiento y que se llamarán **fuerzas acrecentadoras**. Del mismo modo en que las fuerzas estándar están asociada a la configuración actual, la fuerza acrecentadora está asociada a la configuración relajada. Del mismo modo en que el balance de las fuerzas estándar rige el movimiento, el balance de las fuerzas acrecentadoras rige el crecimiento. La introducción de estas fuerzas de naturaleza “oscura” es una herramienta efectiva que ayuda en la modelación de un sistema complejo, el cual no es bien entendido respecto a sus mecanismos internos. Específicamente se asume que

$$\xi = \rho \mathbf{M} : \dot{\mathbf{G}}\mathbf{G}^{-1}, \quad (2.146)$$

donde $\dot{\mathbf{G}}\mathbf{G}^{-1}$ mide la velocidad de las fuerzas acrecentadoras y \mathbf{M} es el tensor referente a las fuerzas internas que están en equilibrio con las externas \mathbf{N} ; es decir,

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}. \quad (2.147)$$

Esta es la ecuación de balance de las fuerzas acrecentadoras. La ecuación (2.147) es entendida como una idealización de todos los estímulos biomecánicos que inducen crecimiento, representados bajo el formalismo de balance de fuerzas.

Proposición 2.11. *El principio de disipación de energía (2.145) puede escribirse en la forma equivalente*

$$\left(J^{\text{el}} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{\text{el}})^{-T} - \psi, \mathbf{F}^{\text{el}} \right) : \dot{\mathbf{F}}^{\text{el}} + \left((\mathbf{F}^{\text{el}})^T J^{\text{el}} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{\text{el}})^{-T} + \mathbf{M} - \psi \mathbf{I} \right) : \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} \geq 0. \quad (2.148)$$

Demostración. Notando que $J = J^{\text{el}} J_{\mathbf{G}}$, la desigualdad (2.145) se puede escribir como

$$\overbrace{(J^{\text{el}} J_{\mathbf{G}} \rho \psi)}^{\cdot} \leq J \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{L} + J \rho \mathbf{M} : \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1}, \quad (2.149)$$

$$\rho J^{\text{el}} (J_{\mathbf{G}} \dot{\psi}) + J_{\mathbf{G}} \psi (\rho \dot{J}^{\text{el}}) \leq J \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{L} + J \rho \mathbf{M} : \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1}, \quad (2.150)$$

entonces de (2.83)

$$\rho J^{\text{el}} (J_{\mathbf{G}} \dot{\psi}) \leq J \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{L} + J \rho \mathbf{M} : \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1}, \quad (2.151)$$

es decir,

$$\rho J^{\text{el}} J_{\mathbf{G}} \dot{\psi} + \rho J^{\text{el}} J_{\mathbf{G}} \psi, \mathbf{F}^{\text{el}} : \mathbf{F}^{\text{el}} \leq J \boldsymbol{\sigma} : (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) + J \rho \mathbf{M} : \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1}, \quad (2.152)$$

$$\rho J^{\text{el}} \Gamma J_{\mathbf{G}} \psi + \rho J \psi, \mathbf{F}^{\text{el}} : \mathbf{F}^{\text{el}} \leq J \boldsymbol{\sigma} : \left((\mathbf{F}^{\text{el}} \mathbf{G}) (\mathbf{F}^{\text{el}} \mathbf{G})^{-1} \right) + J \rho \mathbf{M} : \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1}. \quad (2.153)$$

Pero $\Gamma = \text{tr}(\dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1}) = \mathbf{G}^{-T} : \dot{\mathbf{G}}$

$$\rho J \psi \mathbf{G}^{-T} : \dot{\mathbf{G}} + \rho J \psi, \mathbf{F}^{\text{el}} : \mathbf{F}^{\text{el}} \leq J \boldsymbol{\sigma} : \left(\dot{\mathbf{F}}^{\text{el}} (\mathbf{F}^{\text{el}})^{-1} + \mathbf{F}^{\text{el}} \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{F}^{\text{el}})^{-1} \right) + J \rho \mathbf{M} : \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1}, \quad (2.154)$$

entonces

$$\psi \mathbf{G}^{-T} : \dot{\mathbf{G}} + \psi, \mathbf{F}^{\text{el}} : \mathbf{F}^{\text{el}} \leq J^{\text{el}} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{F}}^{\text{el}} (\mathbf{F}^{\text{el}})^{-1} + J^{\text{el}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{F}^{\text{el}} \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{F}^{\text{el}})^{-1} + \mathbf{M} : \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1}. \quad (2.155)$$

Reagrupando los términos en la última expresión y teniendo en cuenta que,

$$\mathbf{G}^{-T} : \dot{\mathbf{G}} = (\mathbf{I} \mathbf{G}^{-T}) : \dot{\mathbf{G}} = \mathbf{I} : (\dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1}), \quad (2.156)$$

$$(J^{\text{el}} \boldsymbol{\sigma}) : \dot{\mathbf{F}}^{\text{el}} (\mathbf{F}^{\text{el}})^{-1} = J^{\text{el}} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{\text{el}})^{-T} : \dot{\mathbf{F}}^{\text{el}}, \quad (2.157)$$

$$J^{\text{el}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{F}^{\text{el}} \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{F}^{\text{el}})^{-1} = (\mathbf{F}^{\text{el}})^{-T} J^{\text{el}} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{F}^{\text{el}})^{-1} = (\mathbf{F}^{\text{el}})^T J^{\text{el}} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{\text{el}})^{-T} : \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1}, \quad (2.158)$$

se deduce que

$$\psi \mathbf{I} : (\dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1}) + \psi, \mathbf{F}^{\text{el}} : \mathbf{F}^{\text{el}} \leq J^{\text{el}} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{\text{el}})^{-T} : \dot{\mathbf{F}}^{\text{el}} + (\mathbf{F}^{\text{el}})^T J^{\text{el}} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{\text{el}})^{-T} : \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} + \mathbf{M} : \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} \quad (2.159)$$

y finalmente

$$\left(J^{\text{el}} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{\text{el}})^{-T} - \psi, \mathbf{F}^{\text{el}} \right) : \dot{\mathbf{F}}^{\text{el}} + \left((\mathbf{F}^{\text{el}})^T J^{\text{el}} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{\text{el}})^{-T} + \mathbf{M} - \psi \mathbf{I} \right) : \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} \geq 0. \quad (2.160)$$

□

La inecuación (2.148) debe mantenerse válida para valores arbitrarios de $\dot{\mathbf{F}}^{\text{el}}$ y $\dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1}$. Esto es posible si y solo si

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^+ - (\mathbf{F}^{\text{el}})^T J^{\text{el}} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{\text{el}})^{-T} + \psi \mathbf{I}, \quad J^{\text{el}} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{\text{el}})^{-T} = \psi, \mathbf{F}^{\text{el}}, \quad (2.161)$$

con la restricción

$$\mathbf{M}^+ : \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} \geq 0. \quad (2.162)$$

Asumiendo que

$$\mathbf{M}^+ = \dot{\mathbf{G}}\mathbf{G}^{-1}, \quad (2.163)$$

se logra que

$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{G}}\mathbf{G}^{-1} - (\mathbf{F}^{\text{el}})^T J^{\text{el}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F}^{\text{el}})^{-T} + \psi \mathbf{I}. \quad (2.164)$$

Teniendo en cuenta la relación (2.161)₂, se obtiene

$$\dot{\mathbf{G}}\mathbf{G}^{-1} = -(\psi \mathbf{I} - (\mathbf{F}^{\text{el}})^T \psi_{,\mathbf{F}^{\text{el}}}) + \mathbf{M}. \quad (2.165)$$

En la investigación de la ecuación (2.151), cualquier elección del tensor \mathbf{M}^+ satisfaciendo las restricciones (2.162) es admisible; la forma (2.163) es escogida por su simplicidad.

Note que, de la relación (2.161)₂ el tensor $\psi_{,\mathbf{F}^{\text{el}}}$ puede ser interpretado como el tensor de Piola-Kirchoff en la configuración natural κ^{el} . Además de (2.165), surge un tensor tipo Eshelby (Holzapfel [28])

$$\mathbf{E} = \psi \mathbf{I} - \left(\mathbf{F}^{\text{el}} \right)^T \psi_{,\mathbf{F}^{\text{el}}}. \quad (2.166)$$

Usando (2.165) y (2.89)

$$\Gamma = \text{tr}(\mathbf{M} - \mathbf{E}). \quad (2.167)$$

La función escalar (2.167) permite establecer una relación entre crecimiento y tensión. Por tal motivo la denominaremos **término de crecimiento**.

2.4.4 Evolución de la concentración de nutrientes

Cuando las células tumorales se ramifican en un tejido formando un esferoide multicelular, reciben sus nutrientes a través de la superficie, los cuales se difunden en su paso hacia el centro del tumor. La segunda ley de Fick, predice como la difusión¹ causa que la concentración varíe durante un período de tiempo. La ley se formula de la siguiente forma

$$\dot{n} = \delta \Delta n - \dot{n}_{\text{cd}}, \quad (2.168)$$

donde n representa la concentración, δ es el coeficiente de difusión y \dot{n}_{cd} denota el cambio en la concentración de nutrientes debido al consumo y la dilución de nutrientes como consecuencia del crecimiento.

En este contexto, se supone que la concentración de nutrientes es constante en la superficie del tumor, mientras que en su interior los nutrientes son consumidos para su crecimiento. Considérese además, que la concentración de nutrientes varía a medida que tiene lugar el crecimiento. Sea \bar{N} la cantidad total de nutrientes en un volumen pequeño V , y sea $n = \bar{N}/V$ la concentración. El cambio en la concentración de nutrientes sin difusión es entonces

$$\dot{n}_{\text{cd}} = \frac{\dot{\bar{N}}}{V} - \frac{\bar{N}\dot{V}}{V^2}. \quad (2.169)$$

Se puede hacer la siguiente suposición constitutiva: el consumo de \bar{N} es $-\zeta$ proporcional al incremento del volumen, es decir

$$\dot{\bar{N}} = -\zeta \dot{V}, \quad (2.170)$$

dando como resultado

$$\dot{n}_{\text{cd}} = -(\zeta + n) \frac{\dot{V}}{V}. \quad (2.171)$$

¹Se refiere a difusión al movimiento de los átomos a través de un material.

Por otra parte, el incremento del volumen está dado por la fórmula $J\mathbf{G} = \frac{V}{V_0}$. Entonces

$$\dot{V} = V_0 \frac{\partial J\mathbf{G}}{\partial t} = V_0 \frac{\partial J\mathbf{G}}{\partial \mathbf{G}} : \dot{\mathbf{G}} = V_0 \frac{V}{V_0} \mathbf{G}^{-T} : \dot{\mathbf{G}} = 3V \frac{\dot{g}}{g}, \quad (2.172)$$

es decir

$$\frac{\dot{V}}{V} = 3 \frac{\dot{g}}{g}. \quad (2.173)$$

Por tanto, se tiene que

$$\dot{n}_{cd} = -3(\zeta + n) \frac{\dot{g}}{g}, \quad (2.174)$$

es decir el cambio general en n está dado por

$$\dot{n} = \delta \left(\frac{n''}{(r')^2} - \frac{n' r''}{(r')^3} + \frac{2n'}{r r'} \right) - 3(\zeta + n) \frac{\dot{g}}{g}. \quad (2.175)$$

La ecuación anterior tiene la forma de una ecuación en derivadas parciales de tipo parabólica, luego la existencia y unicidad de la solución de (2.175) se garantiza fijando una concentración constante en la frontera para todo instante de tiempo considerado y como condición inicial una función continua (véase Evans [45]).

2.4.5 Ley de crecimiento

Como bien se indica en Ambrossi et al. [50], la identificación de ecuaciones de evolución apropiadas para el tensor de crecimiento, constituye posiblemente uno de los problemas más desafiantes en Biomecánica.

En general, el proceso de crecimiento no puede ser considerado de forma independiente a las respuestas mecánicas. Además, es razonable suponer que la ecuación que describa el crecimiento debe depender de la concentración de nutrientes. Luego, la ecuación que representa la evolución del tensor de crecimiento, se asume en general de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathcal{G}(r_0, n, \mathbf{G}, \boldsymbol{\sigma}^{\text{el}}, t). \quad (2.176)$$

Entonces, se considera que el crecimiento es proporcional a la concentración de nutrientes. Por otro lado, desde el punto de vista biológico aunque un mismo nutriente puede realizar varias funciones, se pueden clasificar en energéticos (sirven de sustrato metabólico para obtener energía, con el fin de que el organismo pueda llevar a cabo las funciones necesarias), plásticos o estructurales (forman la estructura del organismo y también permiten su crecimiento) y reguladores (controlan las reacciones químicas del metabolismo). Por tanto se puede suponer que parte de los nutrientes es destinada a realizar las funciones (o parte de ellas) antes mencionadas, dicha cantidad se denotará por n_0 .

Finalmente, la evolución del tensor de crecimiento se tomará de la siguiente forma

$$\dot{g} = (n - n_0) \Gamma g. \quad (2.177)$$

La ecuación anterior representa un caso particular de una ecuación cuasilineal en derivadas parciales de primer orden, entonces como el miembro derecho es continuo y no se anula, fijada la condición inicial se garantiza la existencia y unicidad de la solución de (2.177) (véase Elsgoltz [46]).

2.4.6 Planteamiento matemático del problema

El modelo puede ser resumido, de la siguiente forma

$$0 = \frac{(\sigma_{rr}^{\text{el}})'}{r'} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr}^{\text{el}} - \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}}) + \rho b_1, \quad (2.178)$$

$$\dot{n} = \delta \left(\frac{n''}{(r')^2} - \frac{n' r''}{(r')^3} + \frac{2n'}{r r'} \right) - 3(\zeta + n) \frac{\dot{g}}{g}, \quad (2.179)$$

$$\dot{g} = (n - n_0) \Gamma g. \quad (2.180)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales anterior debe resolverse, con el objetivo de hallar las funciones incógnitas r , n y g sujeto a las siguientes consideraciones: a) $r(R, t)$ y $r'(R, t)$ se toman de forma tal que en la frontera de la superficie la tensión radial sea cero, es decir, $\sigma_{rr}^{el} = 0$, b) para hallar n se toma una concentración constante en la superficie y como condición inicial $n(r_0, 0) = \frac{1}{2}((\frac{r_0}{3})^2 + 1)$ y c) el tensor de crecimiento inicialmente es el tensor identidad, es decir, $\mathbf{G}(r_0, 0) = \mathbf{I}$.

Definiendo las siguientes variables adimensionales

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu^* \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad r_0 = L \hat{r}_0, \quad t = T \hat{t}, \quad \rho = \frac{\mu^* T^2}{L^2} \hat{\rho}, \quad \mathbf{b} = \frac{L}{T^2} \hat{\mathbf{b}}, \quad n = \frac{\bar{N}}{L^3} \hat{n}, \quad \delta = \frac{L^2}{T} \hat{\delta}, \quad (2.181)$$

entonces el problema (2.178)-(2.180) se rescribe (manteniendo los símbolos originales, es decir, sin “sombreo”)

$$0 = \frac{(\sigma_{rr}^{el})'}{r'} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr}^{el} - \sigma_{\theta\theta}^{el}) + \rho b_1, \quad (2.182)$$

$$\dot{n} = \delta \left(\frac{n''}{(r')^2} - \frac{n' r''}{(r')^3} + \frac{2n'}{r r'} \right) - 3(\tau + n) \frac{\dot{g}}{g}, \quad (2.183)$$

$$\dot{g} = (n - n_0) \Gamma g, \quad (2.184)$$

donde $\tau = L^3 \zeta / \bar{N}$.

2.4.7 Presentación y análisis de los resultados

En esta subsección, se describen los resultados obtenidos para el problema (ver subsección 2.4) de modelado de un tumor encapsulado en forma esférica, forma observada en los experimentos realizados por Helmlinger et al. [39], dentro de una región determinada del cuerpo. Cuyo crecimiento es entendido como el crecimiento isotrópico y no homogéneo de su masa. El cual va a estar sujeto a fuerzas constantes o que dependen del tiempo, que pueden surgir en su interacción con tejidos adyacentes y que recibe sus nutrientes a través de la superficie, los cuales se difunden en su paso hacia el centro del tumor.

El problema de existencia y unicidad de soluciones resulta un tema complicado en la teoría no lineal y es sujeto de varias investigaciones (Ball [47] y Ciarlet [48]). Solamente para la elasticidad lineal tal pregunta puede ser contestada para una amplia clase de problemas. Por otra parte, en la mayoría de los casos no se podrá encontrar soluciones analíticas para un problema dado. En tales casos al menos se trata de hallar soluciones aproximadas. Como estrategia de solución para resolver el sistema (2.182)-(2.184), se implementó una función en Matlab 8.1 donde el tiempo se asumió discreto, lo que permite tener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Tal consideración permite garantizar para cada instante del tiempo la existencia y unicidad de la solución de la ecuación (2.182) (véase Robinson [49]), pues al despejar r'' en función de r' y r en (2.182), es decir $r'' = \mathfrak{F}(r', r, r_0)$, se tiene que \mathfrak{F} , $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial r'}$ y $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial r}$ son continuas en su dominio (Apéndice A). Se fijan entonces las variables sin dimensión: $\rho_0 = 0.1$, $\mu^* = 1$, $\lambda^* = 0.6666663$, $n_0 = n/10^2$, $\delta = 5$ y $\tau = 1$. Luego, la solución obtenida (usando una combinación de los métodos de Runge-Kutta de orden cuatro y de disparo) del sistema (2.182)-(2.184) brinda resultados significativos. Se puede observar en las figuras Fig. 2.2 (izquierda) y Fig. (2.3) (izquierda) que el cuerpo aumenta su tamaño según aumenta el tiempo, cuando el tumor no está sujeto a fuerzas ($b_1 = 0$); este comportamiento tiene relación con la evolución real de este proceso. Se puede hacer la generalización de que la mayor parte de los tumores benignos crecen lentamente a lo largo de un período de años, mientras que la mayor parte de los tumores malignos crecen rápidamente. Sin embargo el comportamiento real es muy amplio. Ciertos tumores malignos crecen lentamente durante años y después, abruptamente, aumentan la velocidad de crecimiento, extendiéndose de forma explosiva para causar la muerte en un período breve de tiempo. Diferencias sustanciales son detectadas al comparar estas curvas con las obtenidas al variar la fuerza, Fig. 2.2 (centro y derecha) y Fig. 2.3 (centro y derecha). Se nota que la variación de la fuerza tiene efecto directo en el volumen final del tumor, es decir, a medida que esta aumenta, el radio final es menor. Ocasionalmente, se ha observado que existen tumores que disminuyen su tamaño, e incluso llegan a desaparecer espontáneamente. En varios trabajos, el volumen del tumor es controlado por la falta de nutrientes, por ejemplo, Ambrosi y Mollica [12]. En Padera et al. [51] se mostró

que las tensiones mecánicas que surgen del crecimiento del tumor comprimen las venas en los tumores y que esta compresión interfiere con el consumo de nutrientes. En Casciari et al. [52] es indicado que la concentración de nutrientes y los niveles de pH en la región interior de un esferoide multicelular son bastante bajos como para causar cambios significativos en las tasas de crecimiento celular. En el presente trabajo una concentración constante de nutrientes en la superficie frontera es considerada. Bajo estas condiciones, los resultados muestran que la fuerza b ejerce gran influencia en el desarrollo del tumor.

Dado que el crecimiento está influenciado por el estado de tensión y de deformación en el tejido, una formulación de los mecanismos de crecimiento debe incluir una relación entre crecimiento y tensión. En el presente trabajo dicho acoplamiento se logró haciendo uso de un principio de disipación de energía. La relevancia del uso de dicho tipo de principio ha sido tomada en cuenta por diversos autores, por ejemplo, en Narayanan et al. [53] se obtiene que la disipación de una gran cantidad de energía libre es desfavorable para la supervivencia de las células. Luego, nuevas perspectivas surgen para el estudio del cáncer a través de la explotación de la tasa de energía libre como una medida de comparación de los procesos físicos que gobiernan la progresión de la enfermedad. Durante muchos años, los científicos se han encontrado con respuestas inesperadas en el tratamiento del cáncer, pues llega un momento en que se hace resistente a las drogas (Agus y Michor [2]), luego un camino posible en la erradicación de la enfermedad puede consistir en la combinación de estos tratamientos con las respuestas mecánicas. Las figuras Fig. 2.4, 2.5 y 2.6, ilustran las tensiones (radial y tangencial) que tienen lugar en el sólido. Es interesante observar en los casos de las figuras Fig. 2.4 (izquierda), 2.5 (izquierda) y 2.6 (izquierda) que a pesar de que la fuerza es cero, las tensiones son diferentes de cero. En tal caso se dice que el crecimiento está acompañado por tensiones residuales. En Skalak et al. [54] se describe la ocurrencia de las tensiones residuales debido al crecimiento volumétrico no homogéneo. Como es indicado en Rodriguez et al. [55] una formulación general para el crecimiento debe permitir la posibilidad del surgimiento de tensiones residuales producto del crecimiento. En el caso de la Fig. 2.4 (derecha) cuando $b_1 = 0.8$ la tensión radial es la misma para los tres instantes de tiempo considerados. También se observa este fenómeno en las curvas de las figuras 2.5 y 2.6.

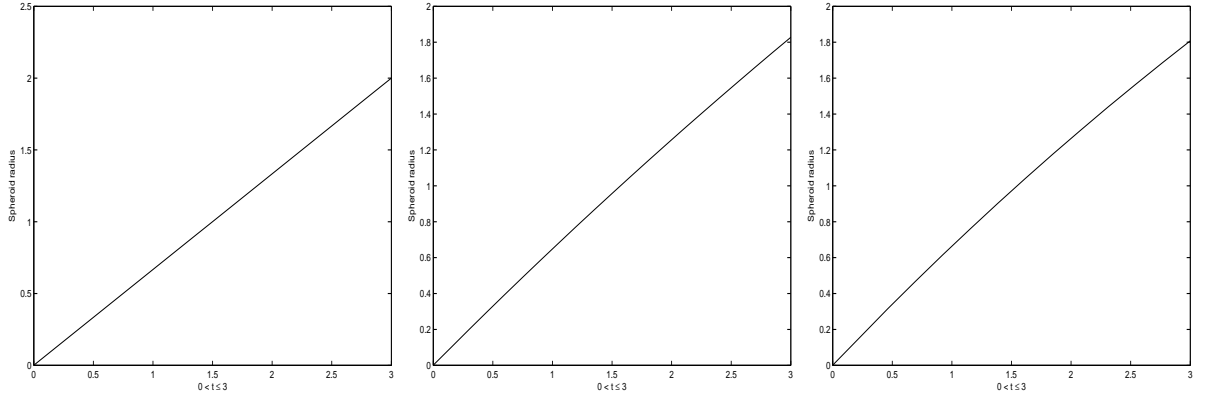


Figura 2.2: Radio (r) para diferentes fuerzas ($b_1 = 0$, $b_1 = \exp(t)/40$ y $b_1 = 0.8$, respectivamente).

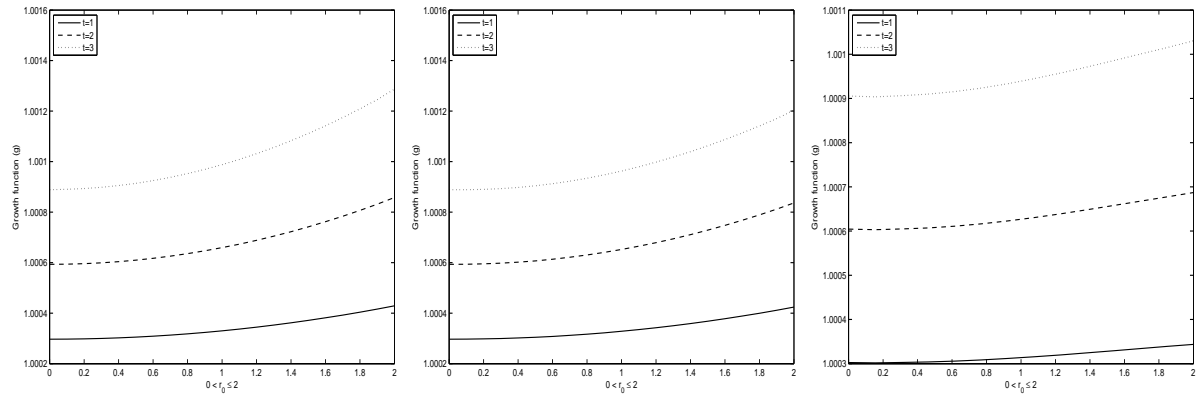


Figura 2.3: Función de crecimiento (g) para diferentes fuerzas ($b_1 = 0$, $b_1 = \exp(t)/40$ y $b_1 = 0.8$, respectivamente).

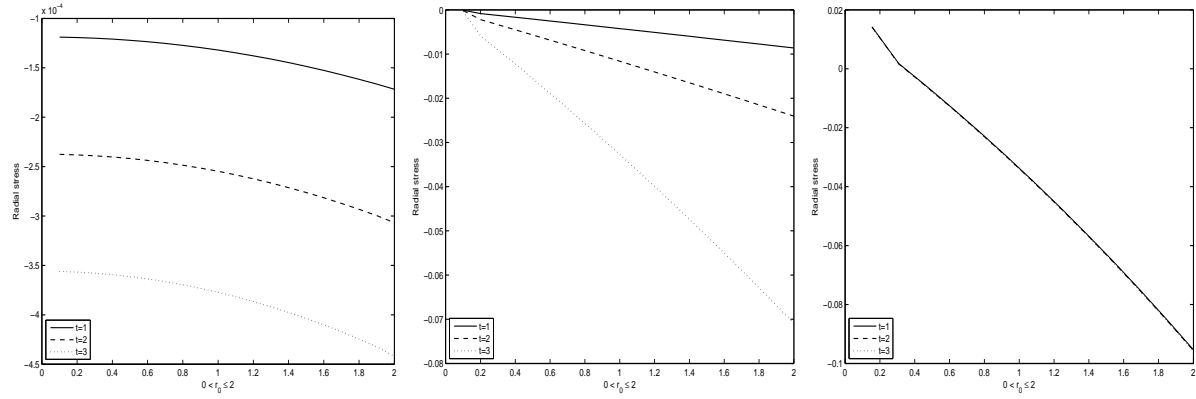


Figura 2.4: Tensión radial (σ_{rr}^{el}) para diferentes fuerzas ($b_1 = 0$, $b_1 = \exp(t)/40$ y $b_1 = 0.8$, respectivamente).

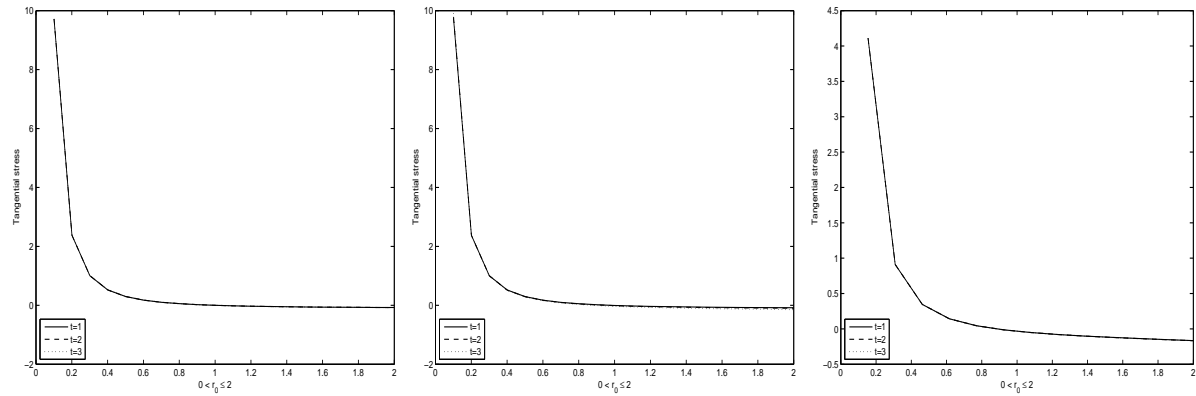


Figura 2.5: Tensión tangencial ($\sigma_{\theta\theta}^{\text{el}}$) para diferentes fuerzas ($b_1 = 0$, $b_1 = \exp(t)/40$ y $b_1 = 0.8$, respectivamente).

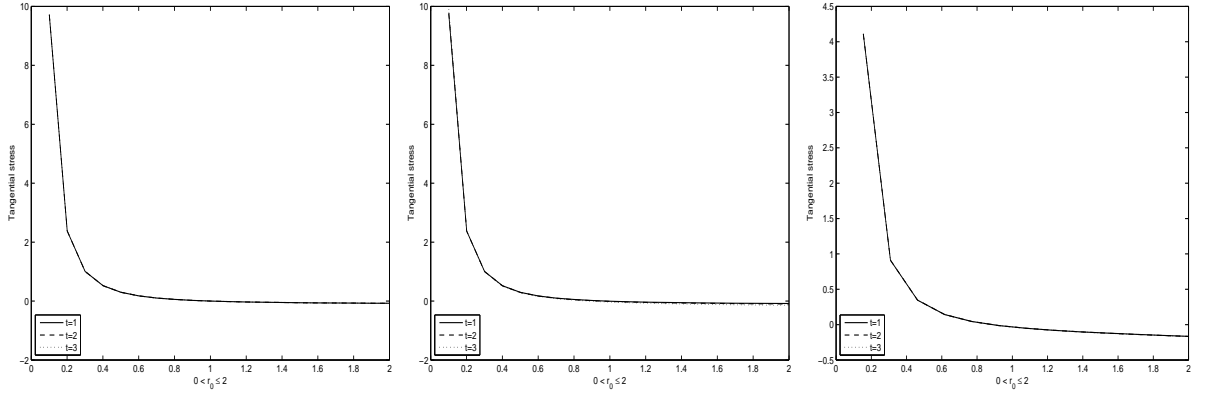


Figura 2.6: Tensión tangencial ($\sigma_{\phi\phi}^{\text{el}}$) para diferentes fuerzas ($b_1 = 0$, $b_1 = \exp(t)/40$ y $b_1 = 0.8$, respectivamente).

2.5 Comparación de los resultados con datos experimentales

Recientemente, se pudieron realizar experimentos (Helmlinger et al. [39]), demostrando que las respuestas mecánicas pueden afectar la progresión de un tumor. En Helmlinger et al. [39] es proveído un método para controlar el crecimiento de una esferoide multicelular in vitro. En dicho trabajo se experimentaron con tres tipos de tumores, entre ellos se encontraba el adenocarcinoma de colon (LS174T). Los experimentos mostraron que producto de la tensión sólida (presión ejercida sobre un sólido por otro sólido) se obtiene una supresión del crecimiento de un tumor. Luego con el objetivo de validar los resultados obtenidos en la tesis, estos se comparan con los resultados experimentales mostrados en Helmlinger et al. [39] (Fig. 2A) para un tumor en suspensión libre y en un gel al 0.3%.

Desafortunadamente, en los trabajos experimentales concernientes al problema en cuestión, no existen referencias confiables sobre los valores de las constantes elásticas, debido a que los datos que pueden ser encontrados, se refieren a estudios sobre tejidos extraídos o que fueron obtenidos de cultivaciones in vitro. En ambos casos las medidas pueden diferir de aquellas que presentan estos tejidos en la realidad, es decir, dentro del organismo. Jurvelin et al. [43] reportaron coeficientes de Poisson de tejidos de pulmones y cartílagos, $\nu_p = 0.3$ y $\nu_p = 0.18$, respectivamente. En el presente trabajo se toma el coeficiente de Poisson para el tejido del tumor como $\nu_p = 0.2$ y el módulo de compresibilidad para el adenocarcinoma de colon (LS174T), como está dado en los experimentos de Netti et al. [44]. Los valores para las constantes de Lamé se dan en la tabla Tabla 2.1 y se toma $\rho_{10} = 0.1 \text{ Kg/cm}^3$, $\rho_2 = 0.01 \text{ Kg/cm}^3$, $n_0 = n/10^2 \text{ mol/cm}^3$ y $\delta = 1.5 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^2/\text{s}$.

Tabla 2.1: Parámetros

Tipo de tumor	K (N/cm^2)	μ^* (N/cm^2)	λ^* (N/cm^2)
LS174T	0.399966	0.2999745	0.199983

Se nota en la figura Fig. 2.7 que a medida que se aumenta \mathbf{b} , el valor final del radio del tumor va siendo cada vez menor, acorde a los datos experimentales. Al comparar los resultados en suspensión libre, se detecta que los resultados numéricos se acercan a los resultados obtenidos en los experimentos de Helmlinger et al. [39]. Un poco más alejados de los resultados hallados en [39], se encuentran aquellos obtenidos cuando la fuerza es no nula, sin embargo se llega al mismo resultado cualitativo, al aumentar \mathbf{b} disminuye r .

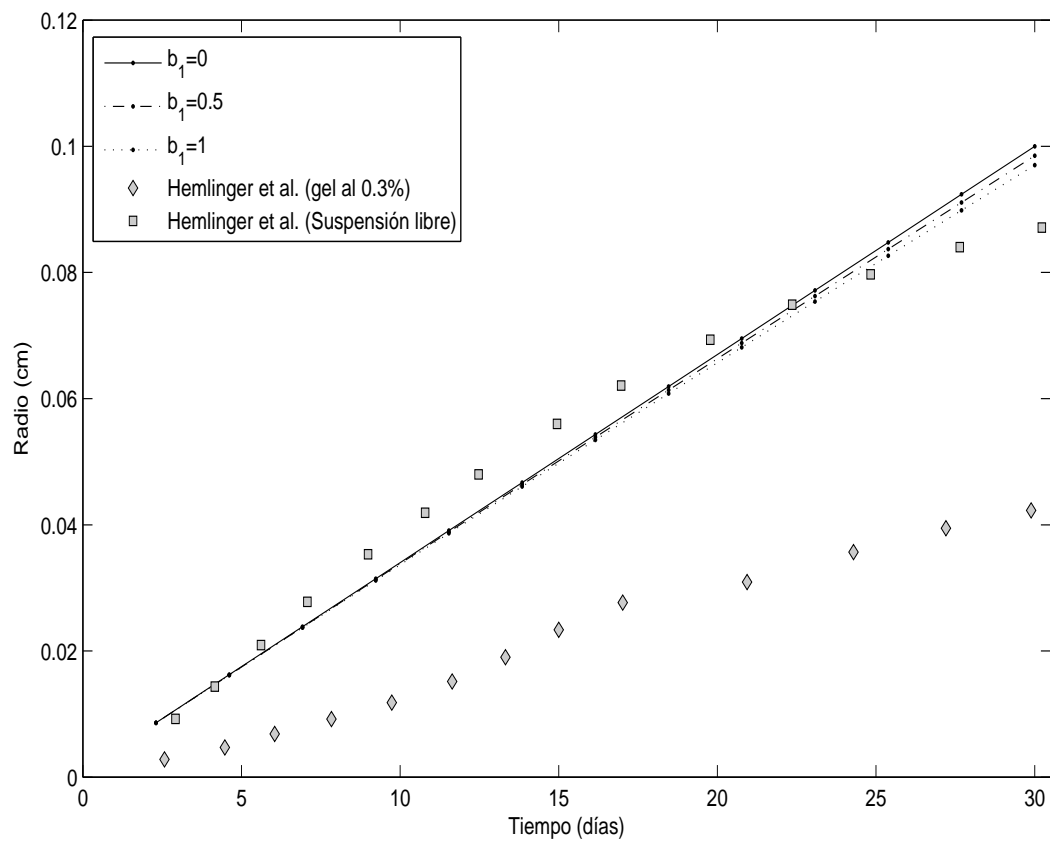


Figura 2.7: Comparación del radio con datos experimentales.

CAPÍTULO 3

Conclusiones generales y recomendaciones

3.1 Conclusiones generales

En el presente trabajo se ha desarrollado una formulación general para el desarrollo volumétrico finito, en el cual se tuvo como principal objetivo caracterizar el crecimiento isotrópico de un tumor esférico encapsulado. Con tal propósito se ha utilizado como base teórica la teoría de múltiples configuraciones naturales, que habilita el uso del acercamiento Lagrangiano para estudiar el problema de crecimiento, además de permitir modelar simultáneamente el cambio en masa y las tensiones que acompañan a dicho cambio, posiblemente causado por la aplicación de fuerzas o por el mismo crecimiento en sí. Dicha ventaja no debe menospreciarse, la introducción de tal herramienta, es útil a la hora de estudiar los diferentes fenómenos cuya descripción requiera el conocimiento de la tensión del cuerpo durante el crecimiento.

El modelo presentado en la tesis se construyó usando las ecuaciones de balance de masa y de balance de momento lineal, la evolución de los nutrientes que son consumidos por el tumor para su desarrollo y de la incorporación de un principio de disipación de energía que permitió vincular la tensión con el crecimiento. Los resultados numéricos fueron obtenidos a través de un programa que se implementó en Matlab y los parámetros físicos se tomaron de datos experimentales existentes en la literatura para el adenocarcinoma de colon (LS174T). Los resultados mostraron que:

- El tumor incrementa su volumen al aumentar el tiempo.
- La variación de la fuerza \mathbf{b} tenía gran influencia en la evolución de la enfermedad. En general, el radio final del tumor era menor si la fuerza ejercida se tomaba cada vez mayor.
- Al comparar estos resultados con los obtenidos experimentalmente, donde los experimentos mostraron que producto de la tensión se obtiene una supresión del crecimiento de un tumor, se obtuvieron características cualitativas similares (tomando parámetros los parámetros físicos de datos experimentales). Luego como el crecimiento puede estar influenciado por el estado de tensión y de deformación del tejido, una formulación completa de la mecánica de crecimiento debe incluir una relación entre el crecimiento y la tensión (o de la deformación).
- Respecto al comportamiento de las tensiones durante el crecimiento, se observó que al considerar $\mathbf{b} = (0, 0, 0)$ estas eran diferentes de cero, es decir, emergían tensiones residuales, lo cual está de acuerdo con el problema en cuestión, pues una formulación general para el crecimiento debe permitir la posibilidad del surgimiento de tensiones residuales producto del crecimiento.

Luego resulta que el estado de tensión del problema estudiado y su interacción con el medio exterior, desde el punto de vista mecánico, tiene gran relevancia en la caracterización del crecimiento de un tumor.

3.2 Recomendaciones

La investigación realizada todavía posee, varias extensiones y problemas abiertos.

- La representación isotrópica del crecimiento es una simplificación del problema estudiado, pues la mayoría de los tejidos biológicos poseen una microestructura altamente anisotrópica, luego es natural incorporar efectos de crecimiento anisótropo.
- El estudio de un modelo multifásico puede ser considerado, tomando las células cancerígenas y la matriz extracelular como un componente sólido y al fluido intersticial como el componente líquido.
- La consideración de otros tipos de geometrías permite el estudio de otros tipos de tumores, por ejemplo, las cuerdas tumorales, estos son tumores que envuelven las venas formando cilindros.

Pero de todos los aspectos que se pudieran mencionar para el mejoramiento de nuestra formulación, la mayor prioridad recae en la necesidad de datos experimentales que contribuyan a la construcción de una ley constitutiva apropiada para el crecimiento. El estudio presentado entonces, tendría mayor valor para los biólogos y clínicos, pues permitiría conocer en mayor grado las patologías del crecimiento y así poder predecir el desarrollo de la enfermedad.

APÉNDICE A

Comprobando condiciones de existencia y unicidad

Con ayuda del programa Wolfram Mathematica 9 se puede garantizar para cada instante del tiempo la existencia y unicidad de la solución de la ecuación (2.182).

(*Se definen las constantes elásticas y otras*)

lambda; mu;

rho10;

b1;

(*Relaciones*)

rho = (g[x]^3 * x^2 * rho10)/(r'[x] * r[x]^2);

Sigmaelrr = rho * (mu * ((r'[x]^2)/(g[x]^2) - 1) + (lambda)/(2) * (((r'[x] * r[x]^2)/(g[x]^3 * x^2))^2 - 1));

Sigmaeltt = rho * (mu * ((r[x]^2)/(g[x]^2 * x^2) - 1) + (lambda)/(2) * (((r'[x] * r[x]^2)/(g[x]^3 * x^2))^2 - 1));

(*Ecuación de balance de momento linear*)

eq1 = FullSimplify[(D[Sigmaelrr, x])/(r'[x]) + (2 * (Sigmaelrr - Sigmaeltt))/(r[x]) + rho * b1];

$$\frac{1}{2x^3g[x]^4r[x]^3r'[x]^3}\rho_{10}\left(r'[x]\left(-(\lambda+2\mu)x^4g[x]^6r[x](2g[x]+3xg'[x])+2x^3g[x]^5(-2\mu r[x]^2+x^2g[x]^2(\lambda+2\mu+b_1r[x]))r'[x]+r[x](4\mu x^4g[x]^5-2\lambda b_1g[x]r[x]^4+2\mu x^5g[x]^4g'[x]-3\lambda b_1xg[x]^4g'[x])r'[x]^2+2\lambda b_1xg[x]r[x]^4r'[x]^3)+xg[x]r[x](\lambda+2\mu)x^4g[x]^6+(2\mu x^4g[x]^4+\lambda b_1r[x]^4)r'[x]^2)r''[x]\right)\right)$$

(*Para verificar las condiciones de existencia y unicidad se despeja la ecuación anterior en función de r'')

Solve[eq1 == 0, r''[x]];

$$r''[x] \rightarrow -\left(r'[x]\left(-2\lambda b_1x^4g[x]^7r[x]-4\mu x^4g[x]^7r[x]-3\lambda b_1x^5g[x]^6r[x]g'[x]-6\mu x^5g[x]^6r[x]g'[x]+2\lambda b_1x^5g[x]^7r'[x]+4\mu x^5g[x]^7r'[x]+2b_1x^5g[x]^7r[x]r'[x]-4\mu x^3g[x]^5r[x]^2r'[x]+4\mu x^4g[x]^5r[x]r'[x]^2-2\lambda b_1g[x]r[x]^5r'[x]^2+2\mu x^5g[x]^4r[x]g'[x]r'[x]^2-3\lambda b_1xg[x]^5g'[x]r'[x]^2+2\lambda b_1xg[x]r[x]^4r'[x]^3\right)\right)/(xg[x]r[x](\lambda b_1x^4g[x]^6+2\mu x^4g[x]^6+2\mu x^4g[x]^4r'[x]^2+\lambda b_1r[x]^4r'[x]^2))$$

(*Para comprobar la continuidad del miembro derecho de la relación anterior se busca el denominador*)

Simplify[

Denominator[

$$\begin{aligned} & - (r'[x] (-2\lambda x^4 g[x]^7 r[x] - 4\mu x^4 g[x]^7 r[x] - 3\lambda x^5 g[x]^6 r[x] g'[x] - 6\mu x^5 g[x]^6 r[x] g'[x] + \\ & 2\lambda x^5 g[x]^7 r'[x] + 4\mu x^5 g[x]^7 r'[x] + 2b_1 x^5 g[x]^7 r[x] r'[x] - 4\mu x^3 g[x]^5 r[x]^2 r'[x] + \\ & 4\mu x^4 g[x]^5 r[x] r'[x]^2 - 2\lambda x g[x] r[x]^5 r'[x]^2 + 2\mu x^5 g[x]^4 r[x] g'[x] r'[x]^2 - 3\lambda x r[x]^5 g'[x] r'[x]^2 \\ & + 2\lambda x g[x] r[x]^4 r'[x]^3)) / (x g[x] r[x] (\lambda x^4 g[x]^6 + 2\mu x^4 g[x]^6 + 2\mu x^4 g[x]^4 r'[x]^2 + \\ & \lambda x r[x]^4 r'[x]^2))) \end{aligned}$$

$$x g[x] r[x] ((\lambda + 2\mu) x^4 g[x]^6 + 2\mu x^4 g[x]^4 r'[x]^2 + \lambda x r[x]^4 r'[x]^2)$$

(*Las cantidades que tienen lugar en el denominador se asumen o se toman positivas para resolver el problema (2.182)-(2.184) por lo que el denominador es distinto de cero.*)

(*La derivada del miembro derecho de la ecuación de balance de momento lineal respecto a r tiene que ser continua. Para comprobarlo se busca el denominador de esta derivada.*)

Denominator[

Simplify[

D[

$$\begin{aligned} & - (r'[x] (-2\lambda x^4 g[x]^7 r[x] - 4\mu x^4 g[x]^7 r[x] - 3\lambda x^5 g[x]^6 r[x] g'[x] - 6\mu x^5 g[x]^6 r[x] g'[x] + \\ & 2\lambda x^5 g[x]^7 r'[x] + 4\mu x^5 g[x]^7 r'[x] + 2b_1 x^5 g[x]^7 r[x] r'[x] - 4\mu x^3 g[x]^5 r[x]^2 r'[x] + \\ & 4\mu x^4 g[x]^5 r[x] r'[x]^2 - 2\lambda x g[x] r[x]^5 r'[x]^2 + 2\mu x^5 g[x]^4 r[x] g'[x] r'[x]^2 - 3\lambda x r[x]^5 g'[x] r'[x]^2 + \\ & 2\lambda x g[x] r[x]^4 r'[x]^3)) / (x g[x] r[x] (\lambda x^4 g[x]^6 + 2\mu x^4 g[x]^6 + 2\mu x^4 g[x]^4 r'[x]^2 + \\ & \lambda x r[x]^4 r'[x]^2)) , r[x] \end{aligned}$$

$$r[x]^2 ((\lambda + 2\mu) x^4 g[x]^6 + 2\mu x^4 g[x]^4 r'[x]^2 + \lambda x r[x]^4 r'[x]^2)^2$$

(*Las cantidades que tienen lugar en el denominador se asumen o se toman positivas para resolver el problema (2.182)-(2.184) por lo que el denominador es distinto de cero.*)

(*La derivada del miembro derecho de la ecuación de balance de momento lineal respecto a r' tiene que ser continua. Para comprobarlo se busca el denominador de esta derivada.*)

Denominator[

Simplify[

D[

$$\begin{aligned} & - (r'[x] (-2\lambda x^4 g[x]^7 r[x] - 4\mu x^4 g[x]^7 r[x] - 3\lambda x^5 g[x]^6 r[x] g'[x] - 6\mu x^5 g[x]^6 r[x] g'[x] + \\ & 2\lambda x^5 g[x]^7 r'[x] + 4\mu x^5 g[x]^7 r'[x] + 2b_1 x^5 g[x]^7 r[x] r'[x] - 4\mu x^3 g[x]^5 r[x]^2 r'[x] + \\ & 4\mu x^4 g[x]^5 r[x] r'[x]^2 - 2\lambda x g[x] r[x]^5 r'[x]^2 + 2\mu x^5 g[x]^4 r[x] g'[x] r'[x]^2 - 3\lambda x r[x]^5 g'[x] r'[x]^2 + \end{aligned}$$

$$2\lambda x g[x] r[x]^4 r'[x]^3) / (x g[x] r[x] (\lambda x^4 g[x]^6 + 2\mu x^4 g[x]^6 + 2\mu x^4 g[x]^4 r'[x]^2 + \lambda r[x]^4 r'[x]^2)) , r'[x]]]$$

$$x g[x] r[x] ((\lambda + 2\mu) x^4 g[x]^6 + 2\mu x^4 g[x]^4 r'[x]^2 + \lambda r[x]^4 r'[x]^2)^2$$

(*Las cantidades que tienen lugar en el denominador se asumen o se toman positivas para resolver el problema (2.182)-(2.184) por lo que el denominador es distinto de cero.*)

Bibliografía

- [1] Byrne, H. M., 1999, *Using mathematics to study solid tumour growth*, Proceedings of the 9th General Meetings of European Women in Mathematics, pp. 81-107. [citado en pág. 2]
- [2] Agus, D. B., Michor, F., 2012, *The sciences converge to fight cancer*, Nature Physics, vol. 8, pp. 773-774. [citado en pág. 2, 62]
- [3] Liotta, L. A., Kleinerman, J., Saidel, G. M., 1974, *Quantitative relationships of intravascular tumor cells, tumor vessels, and pulmonary metastases following tumor implantation*, Cancer Res., vol. 34, pp. 997-1004. [citado en pág. 2]
- [4] Liotta, L. A., Kleinerman, J., Saidel, G. M., 1976, *The significance of hematogenous tumor cell clumps in the metastatic process*, Cancer Res., vol. 36, pp. 889-894. [citado en pág. 2]
- [5] Saidel, G. M., Liotta, L. A., Kleinerman, J., 1976, *System dynamics of a metastatic process from an implanted tumor*. J. Theor. Biol., vol. 56, pp. 417-434. [citado en pág. 2]
- [6] Please, C. P., Pettet G. J., McElwain, D. L. S., 1998, *A new approach to modelling the formation of necrotic regions in tumours*, Appl. Math. Lett., vol. 11, pp. 89-94. [citado en pág. 2]
- [7] Skalak, R., Zargaryan, S., Jain, R. K., Netti, P. A., Hoger, A., 1996, *Compatibility and the genesis of residual stress by volumetric growth*, J. Math. Biol., vol. 34, pp. 889-914. [citado en pág. 2]
- [8] Chaplain, M. A., Sleeman, B. D., 1993, *Modelling the Growth of Solid Tumours and Incorporating a Method for Their Classification Using Nonlinear Elasticity Theory*, J. Math. Biol., vol. 31(5), pp. 431-473. [citado en pág. 2]
- [9] Jones, A. F., Byrne, H. M., Gibson, J. S., Dold, J. W., 2000, *A Mathematical Model of the Stress Induced During Avascular Tumour Growth*, J. Math. Biol., vol. 40(6), pp. 473-499. [citado en pág. 2]
- [10] Taber, L. A., Eggers, D.W., 1996, *Theoretical study of stress-modulated growth in the aorta*, J. Theor. Biol., vol. 180, pp. 343-357. [citado en pág. 2]
- [11] Taber, L. A., Perucchio, R., 2000, *Modeling heart development*, J. Elasticity, vol. 61, pp. 165-197. [citado en pág. 2]
- [12] Ambrosi, D., and Mollica, F., 2002, *On the Mechanics of a Growing Tumor*, Int. J. Eng. Sci., vol. 40, pp. 1297-1316. [citado en pág. 2, 61]
- [13] Rajagopal, K. R., 1995, *Multiple Configurations in Continuum Mechanics*, Reports of the Institute for Computational and Applied Mechanics, vol. 6, University of Pittsburgh. [citado en pág. 2]
- [14] Ambrosi, D., Mollica, F., 2003, *Numerical simulation of the growth of a multicellular spheroid*, in Second M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, UK: Elsevier Ltd, pp. 1608-1612. [citado en pág. 2]
- [15] Rajagopal, K. R., L. Tao, 1995, *Mechanics of Mixtures*, Singapore; River Edge, NJ: World Scientific. [citado en pág. 2, 45]
- [16] Johnson, G., Massoudi, M., Rajagopal, K. R., 1991, *Flow of a Fluid- Solid Mixture Between Flat Plates*, Chem. Eng. Sci., vol. 46(7), pp. 1713-1723. [citado en pág. 2]

- [17] Massoudi, M., Rajagopal, K. R., Phuoc, T. X., 1999, *On the Fully Developed Flow of a Dense Particulate Mixture in a Pipe*, Powder Technol., vol. 104, pp. 258-268. [citado en pág. 2]
- [18] Tao, L., Humphrey, J. D., Rajagopal, K. R., 2001, *A Mixture Theory of Heat Induced Alterations in Hydration and Mechanical Properties in Soft Tissues*, Int. J. Eng. Sci., vol. 39(14), pp. 1535-1556. [citado en pág. 2]
- [19] Chan, B., Donzelli, P. S., Spilker, R. L., 2000, *A Mixed-Penalty Biphasic Finite Element Formulation Incorporating Viscous Fluids and Material Interfaces*, Ann. Biomed. Eng., vol. 28(6), pp. 589-597. [citado en pág. 2]
- [20] Chen, C. Y., Byrne, H. M., King, J. R., 2001, *The Influence of Growth- Induced Stress From the Surrounding Medium on the Development of Multicell Spheroids*, J. Math. Biol., vol. 43(3), pp. 191-220. [citado en pág. 3]
- [21] Ambrosi, D., Preziosi, L., 2002, *On the closure of mass balance models for tumor growth*, Math. Models Meth. Appl. Sciences, vol. 12, pp. 737-754. [citado en pág. 3]
- [22] Baxter, L. T. , Jain, R. K., 1989, *Transport of Fluid and Macromolecules in Tumors. I. Role of Interstitial Pressure and Convection*, Microvasc. Res., vol. 37, pp. 77-104. [citado en pág. 3]
- [23] Jain, R. K., Baxter, L. T., 1988, *Mechanisms of Heterogeneous Distribution of Monoclonal Antibodies and Other Macromolecules in Tumors: Significance of Elevated Interstitial Pressure*, Cancer Res., vol. 48, pp. 7022-7032. [citado en pág. 3]
- [24] Pozrikidis, C., Farrow, D. A., 2003, *A Model of Fluid Flow in Solid Tumors*, Ann. Biomed. Eng., vol. 31, pp. 181-194. [citado en pág. 3]
- [25] Unnikrishnan, G. U., Unnikrishnan, V. U., Reddy, J. N., Lim, C. T., 2010, *Review on the Constitutive Models of Tumor Tissue for Computational Analysis*, Applied Mechanics Reviews, vol. 63. [citado en pág. 3]
- [26] Istkov, M., 2009, *Tensor algebra and tensor analysis for engineers*, Second Edition, Springer, ISBN 978-3-540-93906-1. [citado en pág. 5, 15]
- [27] Taber, L. A., 2004, *Nonlinear theory of elasticity: Applications in Biomechanics*, World Scientific Publishing, ISBN 981-238-735-8. [citado en pág. 57]
- [28] Holzapfel, G. A., 2000, *Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering*, John Wiley & Sons Ltd, ISBN 0-471-82319-8. [citado en pág. 33, 57, 59]
- [29] Truesdell, C., 1957, *Sulle basi della termomeccanica*, Rend. Lincei, vol. 22, pp. 33-38. [citado en pág. 43]
- [30] Truesdell, C., 1957, *Sulle basi della termomeccanica*, Rend. Lincei, vol. 22, pp. 158-156. [citado en pág. 43]
- [31] Bowen, R. M., 1976, *Theory of mixtures in Continuum Physics*, vol. 3. New York: Eringen, A.C.. [citado en pág. 43]
- [32] Bowen, R. M., 1980, *Incompressible porous media model by use of the theory of mixtures*, Int. J. Eng. Sci., vol. 18, pp. 1129-1148. [citado en pág. 43]
- [33] Green, A. E., Naghdi, P. M., 1965, *A dynamical theory of interacting continua*, Int. J. Eng. Sci., vol. 6, pp. 231-241. [citado en pág. 43]
- [34] Green, A. E., Naghdi, P. M., 1969, *On basic equations for mixtures*, J. Mech. Appl. Math., vol. 22. [citado en pág. 43]
- [35] Rajagopal, K. R., Tao, L., 1995, *Mechanics of Mixture*, Singapore; River Edge, NJ: World Scientific. [citado en pág. 43]

- [36] Rajagopal, K. R., Srinivasa, A. R., 2005, *On The Role of the Eshelby Energy-Momentum Tensor in Materials with Multiple Natural Configurations*, Mathematics and Mechanics of Solids, vol. 10, pp. 3-24. [citado en pág. 47]
- [37] Eckart, C., 1948, *The thermodynamics of irreversible processes IV, the theory of elasticity and anelasticity*, Physical Review, vol. 73 (4), pp. 373-382. [citado en pág. 47]
- [38] Rajagopal, K. R., Srinivasa, A. R., 2000, *A thermodynamic framework for rate type materials*, Journal of non-Newtonian Fluid Mechanics, vol. 88, pp. 207-228. [citado en pág. 48]
- [39] Helmlinger, G., Netti, P. A., Melder, R. J., Jain, R. K., Lichtenbeld-Dubois, H., 2002, *Modulation of multicellular aggregates by pressure from growth in a matrix*, Patent No. US 6,368,858 B1. Date of patent: April 9. [citado en pág. 49, 61, 64]
- [40] Bertram, A., 2008, *Elasticity and plasticity of large deformations*, 2nd Ed., Springer, ISBN: 978-3-540-69399-4. [citado en pág. 25, 53]
- [41] Ambrosi, D., Guana, F., 2007, *Stress modulated growth*, Math. Mech. Solids, vol. 12, p. 319-343. [citado en pág. 57]
- [42] DiCarlo, A., Quiligotti, S., 2002, *Growth and balance*, Mech. Res. Commun., vol. 29, p. 449-456. [citado en pág. 57]
- [43] Jurvelin, J. S., Buschmann, M.D., Hunziker, E.B., 1997, *Optical and mechanical determination of Poisson's ratio of adult bovine human articular cartilage*. J. Biomech., vol. 30, pp. 235-241. [citado en pág. 64]
- [44] Netti, P. A., Berk, D. A., Swartz, M. A., Grodzinsky A. J., Jain, R. K., 2000, *Role of extracellular matrix assembly in interstitial transport in solid tumors*, Cancer Research, vol. 60, pp. 2497-2503. [citado en pág. 64]
- [45] Evans, L. C., 1999, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island. [citado en pág. 60]
- [46] Elsgoltz, L., 1969, *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, Editorial Mir, Moscú, 1969. [citado en pág. 60]
- [47] Ball, J. M., 1977, *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal., vol. 63, 337-403. [citado en pág. 61]
- [48] Ciarlet, P. G., 1983, *Lectures on Three-Dimensional Elasticity*, Tata Inst. of Fundamental Research, Bombay. [citado en pág. 61]
- [49] Robinson, J. C., 2004, *An introduction to ordinary differential equations*, Cambridge University Press, New York, ISBN 978-0-521-82650-1. [citado en pág. 61]
- [50] Ambrosi, D., Ateshian, G. A., Arruda, E. M., Cowin, S. C., Dumais, J., Goriely, A., Holzapfel, G. A., Humphrey, J. D., Kemkemer, R., Kuhl, E., Olberding, J. E., Taber, L. A., Garikipati, K., 2010, *Perspectives on biological growth and remodeling*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, doi:10.1016/j.jmps.2010.12.011. [citado en pág. 60]
- [51] Padera, T. P., Stoll, B. R., Tooredman, J. B., Capen, D., di Tomasso, E., Jain, R. K., 2004, *Cancer cells compress intratumour vessels*, Nature, vol. 427. [citado en pág. 61]
- [52] Casciari, J. J., Sotirchos, S. V., Sutherland, R. M., 1992, *Variations in Tumor Cell Growth Rates and Metabolism with Oxygen Concentration, Glucose Concentration, and Extracellular pH*, Journal of Cellular Physiology, vol. 151, pp. 386-394. [citado en pág. 62]
- [53] Narayanan, H., Verner, S. N., Mills, K. L., Kemkemer, R., Garikipati, K., 2010, *In silico estimates of the free energy rates in growing tumor spheroids*, J. Phys.: Condens. Matter, vol. 22, (16pp). [citado en pág. 62]

- [54] Skalak, R., Dasgupta, G., Moss, M., 1982, *Analytical description of growth*, J. Theor. Biol., vol. 94, pp. 555-577. [citado en pág. 62]
- [55] Rodriguez, E. K., Hoger, A., McCulloch, A., 1994, *Stress dependent finite growth in soft elastic tissues*, J. Biomechanics, vol. 27, pp. 455-467. [citado en pág. 62]