ÁLGEBRA DE OPERADORES

Habiendo definido el espacio n - dimensional euclídeo y los vectores funciones capaces de expresarlo necesitamos trabajar con tales vectores funciones para poder modelar teóricamente los fenómenos de la cuantización. Los **operadores** (de operar, trabajar, laborar, accionar) son los elementos que nos servirán para estos fines.

Un **operador matemático** puede ser considerado como un símbolo o notación abreviada de un conjunto definido, no vacío, de operaciones u acciones a realizar con o sobre un término llamado operando.

Ejemplos de operadores comunes:

$$log, \quad d/dx, \quad \sqrt{}$$

Se dice que un espacio vectorial $\boldsymbol{R}$ tiene definido un operador $\hat{A}$ si cualquiera de sus vectores $\psi_i \in \boldsymbol{R}$ puede generar un vector $\hat{A}\psi_i \in \boldsymbol{R}$ que se conoce como su **imagen** con ese operador.

$\hat{A}$ es un **operador lineal** si:

$$\hat{A}(\psi_i + \psi_j) = \hat{A}\psi_i + \hat{A}\psi_j$$
$$\hat{A}(\alpha\psi_i) = \alpha\hat{A}\psi_i$$

donde α es un número real cualquiera.

En el caso del principio de superposición de los estados :

$$c_i\psi_i + c_j\psi_j = \Psi$$

si se aplica un operador lineal sobre cada estado componente, entonces:

$$\hat{A}(c_i\psi_i + c_j\psi_j) = \hat{A}c_i\psi_i + \hat{A}c_j\psi_j = \hat{A}\Psi$$

El operador $\hat{A}$ es **la suma de los operadores lineales** $\hat{G}$ y $\hat{H}$ si son operadores lineales del mismo espacio vectorial ***R*** y se cumple que:

$$\hat{A}\psi_i = \hat{G}\psi_i + \hat{H}\psi_i$$

para toda $\psi_i \in$ ***R***. En este caso $\hat{A}$ es también un operador lineal.

La **suma de operadores lineales** tiene las siguientes propiedades:

1. $\hat{G} + \hat{H} = \hat{H} + \hat{G}$
2. $(\hat{G} + \hat{H}) + \hat{A} = \hat{G} + (\hat{H} + \hat{A})$
3. $\hat{A} + \hat{O} = \hat{A}$ para toda operación $\hat{A}$
4. Existe una operación $-\hat{A}$ tal que:
5. $(-\hat{A}) + \hat{A} = \hat{O}$

El operador $\hat{A}$ se llama **producto de los operadores lineales** $\hat{G}$ y $\hat{H}$ si se cumple que:

$$\hat{A}\psi_i = \hat{G}(\hat{H}\psi_i)$$

para toda $\psi_i \in R$.

La multiplicación de operadores es la aplicación sucesiva de dos o más de ellos sobre un vector-función en el orden a partir del más inmediato hacia el más lejano a dicho vector.

El **producto de operadores lineales** tiene las siguientes propiedades:

1. $(\hat{G}\hat{H})\hat{A} = \hat{G}(\hat{H}\hat{A})$ que es la ley asociativa.
2. Existen operaciones identidad o transformaciones unitarias $\tilde{E}$ tales que
$$\hat{G}\tilde{E} = \tilde{E}\hat{G} = \hat{G}$$
3. La suma y el producto se vinculan por la ley distributiva:
$$(\hat{G} + \hat{H})\,\hat{A} = \hat{G}\hat{A} + \hat{H}\hat{A}$$
y también por:
$$\hat{G}(\hat{H} + \hat{A}) = \hat{G}\hat{H} + \hat{G}\hat{A}$$

La **conmutatividad** NO es una propiedad inherente a los operadores lineales. O sea, en general:

$$(\hat{A}\hat{H}) \neq (\hat{H}\hat{A})$$

Sin embargo, existen algunos operadores que SI conmutan:

$$(\hat{G}\hat{H}) = (\hat{H}\hat{G})$$

Se denomina **conmutador** a la relación:

$$\left[\hat{A},\hat{G}\right] \equiv \hat{A}\hat{G} - \hat{G}\hat{A}$$

de forma que si $\left[\hat{A},\hat{G}\right] = 0$ los operadores $\hat{A}$ y $\hat{G}$ SI conmutan, y si $\left[\hat{A},\hat{G}\right] \neq 0$ los operadores $\hat{A}$ y $\hat{G}$ NO conmutan.

Si $\hat{A}$ es un operador en un espacio ***R***, entonces el conjunto ***D*** de todos los vectores imagen $\hat{A}\psi_i$ no nulos (donde $\psi_i \in$ ***R***) se llama el **dominio de valores del operador** $\hat{A}$ y el conjunto ***M*** de los todos vectores ψ_j tales que $\hat{A}\psi_j = 0$ es el **núcleo del operador**.

Tanto el dominio como el núcleo del operador son subespacios de ***R***.

La dimensión del dominio de valores del operador $\hat{A}$ se denomina **rango del operador**. La dimensión del núcleo se denomina **defecto del operador**.

Debe anotarse que el dominio del operador agrupa a aquellos vectores a los que corresponda un valor no nulo de $\hat{A}\psi_i$ por lo que eso delimita o selecciona el tipo de funciones afines al operador que cumplen estas características.