

## LA INCERTIDUMBRE EN MECÁNICA CUÁNTICA

Sea  $a$  el valor exacto de una propiedad física de un cierto sistema. Si se hacen varias determinaciones experimentales de esa propiedad, cada medición  $a_i$  contendrá un cierto error inherente. La única forma de evaluar cuán cercano es el valor medido al valor exacto, que se desea conocer, es dándole al valor medio de las determinaciones el privilegio de ser el más creíble. Así, la calidad de la determinación final estará dada por cuánto se desviaron las mediciones del valor medio.

Así, se define  $\Delta a$  como la **desviación media cuadrática** (*root mean square* o RMS) *pesada* de  $n$  determinaciones de cierta propiedad física en un sistema, dada como resultado de los valores obtenidos en cada medición agrupados en  $\{a_i\}$ . Ésta se puede expresar como:

$$\Delta a = \left[ \sum_i (a_i - \bar{a})^2 P(a_i) \right]^{1/2}$$

donde:

$$\sum_i P(a_i) = \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \bar{a} = \sum_i a_i P(a_i)$$

y  $n$  es el número de determinaciones.

Conceptualmente,  $\Delta a$  mide cuán dispersa es una medición y mientras mayor es, más dudoso es el valor obtenido. Como puede observarse  $\Delta a$  es siempre positiva y resulta muy sensible al ajuste o concordancia de los valores por su condición de magnitud cuadrática. La **varianza** es el cuadrado de esta magnitud, y expresa esencialmente el mismo concepto:

$$\sigma_a^2 = (\Delta a)^2 = \sum_i (a_i - \bar{a})^2 P(a_i)$$

Como sabemos, el valor esperado en mecánica cuántica para funciones normalizadas es:

$$\bar{a} = \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle$$

y se utiliza cuando no se conoce la función propia del operador y se pretende una aproximación del valor propio con operadores y funciones adaptadas.

Haciendo un paralelo con la teoría estadística, *este NO puede ser el valor de referencia* para valorar cuán exacto es el cálculo de una magnitud con la herramienta de los operadores y sus valores propios cuando actúan sobre funciones propias.

**El valor de referencia en la mecánica cuántica tiene que ser el valor propio o exacto de la magnitud.**

En teoría nunca se mide ningún valor, solo se calculan. Las mediciones se hacen experimentalmente.

De esta forma, la calidad de un valor calculado u obtenido de tal magnitud física en la teoría cuántica puede evaluarse en comparación con ese valor propio y el valor esperado o medio se convierte en el objeto de comprobación:

$$(\Delta a)^2 = \langle (\hat{A} - \bar{a})\psi | (\hat{A} - \bar{a})\psi \rangle \geq 0$$

donde la expresión entre los braquetes  $\langle \rangle$  expresa el valor integral en todo el espacio de  $(\Delta a)^2$ .

Es fácilmente demostrable que si  $\psi$  es función propia de  $\hat{A}$ , entonces:

$$\hat{A}\psi = a\psi \Rightarrow (\Delta a)^2 = 0$$

o lo que es lo mismo, se carece de incertidumbre con respecto al valor obtenido para la propiedad física  $a$ .

*Esto equivale a decir que el elemento de matriz, o valor esperado de una función propia es el valor propio.*

Sean las magnitudes físicas  $g$  y  $u$  que se pueden calcular con los operadores asociados  $\hat{G}$  y  $\hat{U}$ . Es demostrable que si:

$$(\Delta g)^2 = \langle \hat{G}^* \hat{G} \rangle - |\bar{g}|^2$$

$$(\Delta u)^2 = \langle \hat{U}^* \hat{U} \rangle - |\bar{u}|^2$$

entonces:

$$(\Delta g)^2 (\Delta u)^2 \geq \frac{1}{4} i (\hat{G}\hat{U} - \hat{U}\hat{G})$$

$$\boxed{\Delta g \Delta u \geq \frac{1}{2} [\hat{G}, \hat{U}]}$$

que es la forma general del llamado **principio de incertidumbre de Heisenberg**:

*Dos magnitudes con operadores diferentes solo pueden ser calculadas exactamente para el mismo sistema si su función de onda es propia de ambos operadores simultáneamente.*