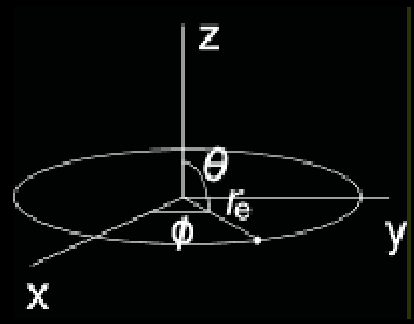
LA PARTÍCULA SOBRE UN ANILLO



Se aplica lo mismo a una partícula que rota en una *órbita circular* en torno a un centro que a un disco, pues se basa en el radio de giro *r* en torno al centro de masas del sistema y el momento de inercia asociado $I = mr_e^2$ al mismo, donde *m* es la masa de la partícula. *Es un caso de solo dos dimensiones espaciales.*

El hamiltoniano del sistema en cartesianas es:

$$\hat{H} = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right\}$$

y en coordenadas cilíndricas, donde $x = r\cos\phi$ y $y = r\,sen\,\phi$ se hace:

$$\boxed{\hat{H} = -\left(\frac{\hbar^2}{2mr^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) = -\left(\frac{\hbar^2}{2I}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right)}$$

Si hacemos $r = r_e = 1$ el problema consiste entonces en **rotaciones a una distancia fija y unitaria** y la función de onda depende solo del ángulo ϕ. La ecuación de Schrödinger se simplifica entonces a:

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\Phi(\phi)^2} = -\left(\frac{2IE}{\hbar^2}\right)\Phi(\phi)$$

Creando una magnitud de conveniencia:

$$m_l^2 = \frac{2IE}{\hbar^2}$$

entonces:

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\Phi(\phi)^2} = -m_l^2\Phi(\phi)$$

cuya solución general es:

$$\Phi(\phi) = Ae^{im_l\phi}$$

Introduzcamos condiciones de contorno dadas por el carácter cíclico del movimiento, o sea, $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$. Por lo tanto:

$$Ae^{im_l\phi} = Ae^{im_l(\phi+2\pi)} = Ae^{im_l\phi}e^{im_l 2\pi}$$

y esto solo se satisface cuando $e^{2\pi i m_l} = 1$, o lo que es lo mismo, solo se le permiten al ángulo valores de 0, 2π, 4π, ... y eso solo se logra cuando m_l *sea un número entero*, de forma tal que:

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Despejando, las energías permitidas al sistema estarán cuantizadas (son discontinuas) por el valor de m_l:

$$\boxed{E = m_l^2\left(\frac{\hbar^2}{2I}\right)}$$

Finalmente, normalizando la función de onda encontramos el valor del coeficiente A:

$$\int_0^{2\pi} \Phi^* \Phi d\phi = \int_0^{2\pi} A e^{-im_l\phi} A e^{im_l\phi} d\phi$$

$$= |A|^2 \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= A^2 2\pi = 1$$

por lo tanto:

$$A = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$$

y la ecuación de onda que representa al sistema de una partícula sobre un anillo bidimensional será:

$$\boxed{\Phi(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{im_l\phi}}$$