

Revista Electrónica Nova Scientia

Compuestos elásticos no lineales con condiciones de contacto imperfectas

**Juan C. López Realpozo¹, Reinaldo Rodríguez Ramos¹,
Raúl Guinovart Díaz¹,
Julián Bravo Castellero¹, Federico J. Sabina².**

¹Facultad de Matemática y Computación, Universidad de la Habana, Cuba

²Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas,
Universidad Nacional Autónoma de México, DF., México

Cuba - México

Nombre de autor para correspondencia. Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, San Lázaro y L, CP 10400, Cuba. E-mail: jclrealpozo@matcom.uh.cu, reinaldo@matcom.uh.cu, gui-no@matcom.uh.cu, jbravo@matcom.uh.cu
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 20-726, Delegación de Álvaro Obregón, 01000 México, DF., México. E-mail: fjs@mym.iimas.unam.mx

Resumen

En el siguiente trabajo, se obtiene la ley efectiva de un compuesto laminado elástico no lineal formado por dos constituyentes, para lo cual utilizamos el Método de Homogeneización Asintótica. Se trabaja con un compuesto bifásico formado de los materiales aluminio y acero, en el que se consideran condición de contacto perfecta e imperfecta (tipo *spring* y tipo *membrana*) entre las constituyentes. En los tipos de contacto imperfecto considerados, se tienen ambas constituyentes con propiedades isotrópicas. En este trabajo, se hace una extensión de resultados anteriormente publicados, donde solo se consideró condiciones de contacto perfecto entre las constituyentes para compuestos elásticos o piezoeléctricos. En este caso también se presentan algunos ejemplos numéricos donde se muestra que para los compuestos considerados, el Método de Homogeneización Asintótica es eficiente para determinar propiedades efectivas de compuestos en los cuales se considera condiciones de contacto imperfecta en la interfase.

Palabras clave: Homogeneización asintótica; Contacto imperfecto; Ley efectiva; Elástico no lineal.

Recepción: 14-08-08

Aceptación: 18-09-08

Abstract

In this contribution, the effective strongly non-linear elastic law is obtained, by means of the Asymptotic Homogenization Method (AHM), for a two-layer laminate composite (Al/Steel) with imperfect contact condition (*spring* and *membrane type*). In both cases the constituents exhibit isotropic properties. This work is an extension of the results before reported, where only perfect contacts for elastic or piezoelectric composites were considered. Some numerical examples demonstrate that the present model by AHM is efficient for the analysis of composites with presence of imperfect interphase.

Key words: Asymptotic Homogenization; Imperfect Contact; Effective Law; Non-Linear Elastic.

Formulación matemática de las condiciones de contacto.

En general, es frecuente al estudiar los compuestos laminados tener en cuenta sus componentes planas y antiplanas a partir del problema tridimensional en estudio. Nosotros consideramos la condición clásica de contacto *perfecto* entre las constituyentes, para la cual se considera condición de continuidad de las tensiones y continuidad de los desplazamientos entre las constituyentes del compuesto, de manera que se cumpla,

$$\|\mathbf{r}_u\| = 0, \quad (1)$$

$$\|s_{ij}\|n_j = 0, \quad (2)$$

donde hemos considerado la doble barra, como el salto de la función en la interfase, de manera que $\|f\| = f^{(1)} - f^{(2)}$.

Por otra parte, hemos considerado la condición de contacto imperfecto tipo *spring*, en la cual, se mantiene la continuidad de las tensiones entre las constituyentes del compuesto, pero existe un salto entre los desplazamientos para las constituyentes, en la dirección normal y tangencial respectivamente. Para este tipo de contacto imperfecto, las condiciones en la frontera de la interfase estarán determinadas por:

$$\|s_{ij}\|n_j = 0, \quad (3)$$

$$s_t = M\|u_t\|, \quad s_n = K\|u_n\|, \quad (4)$$

representado los parámetros M y K el factor de proporcionalidad, que determina el grado de imperfección o discontinuidad entre las constituyentes en la interfase del compuesto. Estos parámetros tienen dimensión de tensión dividida por longitud. Las magnitudes u_n, s_n y u_t, s_t denotan el vector desplazamiento y tensión respectivamente, en las direcciones normal y tangencial a la interfase del compuesto. Por otra parte, y a pesar de que el contacto imperfecto del tipo *membrana* no es realizable para el caso de compuestos unidimensionales, al considerar que es interesante su análisis desde el punto de vista matemático, lo hemos incluido en este trabajo. En este contacto imperfecto tipo *membrana* entre las constituyentes [1-3], se considera continuidad en los desplazamientos en todas las direcciones (normal y tangencial) y continuidad en las tensiones en las direcciones tangenciales, mientras que además se satisface

una condición de continuidad para una combinación lineal determinada entre las tensiones y los desplazamientos, podemos formular este contacto imperfecto en la forma:

$$\|\mathbf{r}_u\| = 0 \quad (5)$$

$$\|s_{il} + au_i\| = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \|s_{ig}\| = 0 \quad (g = 2, 3) \quad (6)$$

donde el parámetro “ a ” denota cierta magnitud relativa al equilibrio imperfecto entre las constituyentes en la interface del compuesto. Resulta relativamente fácil notar que si $a = 0$ en la condición de contacto imperfecto tipo *membrana* considerada, se reproduce la condición de contacto *perfecto* clásica reflejada en (1)-(2).

En el caso en que se consideran compuestos con una sección transversal en la interface relativamente fina, se tendrán en cuenta las componentes antiplanas y frecuentemente el análisis es realizado teniendo en cuenta las componentes bidimensionales.

En este trabajo, en aras de la simplicidad, nosotros consideramos una barra unidimensional con una carga normal en uno de sus extremos finales. Por lo cual estamos considerando que, $s_{11} \equiv s$, $u_1 \equiv u$ son las componentes no nulas de la función de tensiones y del vector de desplazamiento respectivamente, dependiendo ambas solamente de la componente $x_1 \equiv x$, de manera que se cumpla además que $s_{12} = s_{13} = s_{23} = s_{22} = s_{33} = 0$, $u_2 = u_3 = 0$. Con estas consideraciones, y luego de utilizar el Método de Homogeneización Asintótica, las condiciones de contacto imperfecto del tipo *spring* y *membrana* referidas en las expresiones (3)-(6) pueden ser reescritas en la forma

$$s = K \|N\|. \quad (7)$$

$$\|s + aN\| = 0, \quad \|N\| = 0. \quad (8)$$

Compuesto fuertemente no lineal

Ahora, nosotros estudiaremos en detalle un compuesto unidimensional “fuertemente no lineal”. En este caso, las constituyentes son consideradas elásticas, homogéneas y tales que responden a una ley constitutiva de endurecimiento de tipo isotrópica [4].

Es bien conocido que, aquel valor para el cual el estado $M = (e_1, s_1)$ representa una tensión simple en el compuesto, puede ser llamado **límite elástico** e_1 , y el rango de las tensiones $s < s_1$ para el cual se cumple que el compuesto es sometido a una tensión simple, puede ser llamado **rango elástico**. De tal manera que, si la tensión varía dentro de este rango, solo tendrá lugar una deformación elástica en el compuesto, mientras que, aplicar una carga más allá del estado M implicaría que estaría ocurriendo una deformación no lineal en el compuesto.

Bajo estas suposiciones, la Ley de Hooke podrá ser formulada para el primer intervalo $e < e_1$, en la forma $s_1 = Ee_1$ siendo la pendiente de la recta $E = s_1/e_1 = \tan A$. De manera similar, para el segundo intervalo $e \geq e_1$ la pendiente de la recta estará determinada por $E^* = (s_2 - s_1)/(e_2 - e_1) = \tan B$. En este caso, la tensión es expresada como $s = Ee_1 + E^*(e - e_1)$.

Teniendo en cuenta lo antes expresado, para las componentes de un compuesto multifásico “fuertemente no lineal” la relación constitutiva puede ser escrita como

$$s^{(t)}(u') = \begin{cases} E_t u' & \text{si } u' < e_s^{(t)} \\ E_t^* u' + (E_t - E_t^*) e_s^{(t)} & \text{si } u' \geq e_s^{(t)} \end{cases} \quad (9)$$

representando E_t el módulo de Young de la fase homogénea t , E_t^* representa el módulo de Young crítico para la fase t y $e_s^{(t)}$ representa el límite elástico de la deformación para la fase t .

La ecuación (9) se corresponde con la de aquellos materiales fuertemente deformables [5], también conocidos como materiales lineales a trozos o con potencial biparabólicos.

Leyes efectivas para diferentes tipos de contacto

En este trabajo, se obtuvo la ley efectiva del compuesto unidimensional para diferentes consideraciones de contacto perfecto o imperfecto (tipo *spring* o *membrana*) en la interface. En este sentido, seguidamente reportamos los resultados para un compuesto bifásico. En lo que

sigue y en aras de simplificar, denotaremos con \bar{e} y \bar{s} la deformación y tensión del compuesto bifásico respectivamente.

Describiremos los pasos principales dados en el cálculo de la ley efectiva para un compuesto unidimensional con componentes “fuertemente no lineal” al considerar los tres tipos de contacto diferentes en estudio.

En este sentido, nosotros podemos distinguir tres tipos de comportamiento en general del compuesto: “compuesto elástico lineal” cuando $v' < \bar{e}_s^{(1)}$, “compuesto elástico lineal y fuertemente no lineal” si $\bar{e}_s^{(1)} \leq v' < \bar{e}_s^{(2)}$ y “compuesto fuertemente elástico no lineal puro” si $v' \geq \bar{e}_s^{(2)}$, donde $\bar{e}_s^{(1)}$ y $\bar{e}_s^{(2)}$ representan los límites elásticos de la deformación para cada una de las fases [3] del compuesto.

- Comportamiento “elástico lineal” $v' < \bar{e}_s^{(1)}$, en el que ambas constituyentes tienen comportamiento elástico.

La condición de contacto perfecto en la interface estará dada por las ecuaciones (1) y (2). Aquí, usando el Método de Homogeneización Asintótica, y teniendo en cuenta propiedades de periodicidad y de unicidad que reúne la función local $N^{(1)}(x)$, la ley efectiva lineal es obtenida y puede ser escrita en la forma $\bar{s} = \langle E_1^{-1}, E_2^{-1} \rangle^{-1} v'$ donde $\langle \bullet, * \rangle = \bullet q_1 + * q_2$, representando q_a para $a = 1, 2$ el volumen de fracción de las constituyentes.

Para la condición de contacto imperfecto (tipo *spring*) dada por las ecuaciones (3) y (4), si se usan las ecuaciones (7) y (9), entonces la fórmula (4) teniendo en cuenta las condiciones de periodicidad y de unicidad de la función local $N^{(1)}(x)$ puede ser escrita en la forma:

$$E_1(v' - C_2^{(1)}) = K[-q_1 C_2^{(1)} - q_2 C_2^{(2)}] \text{ y } E_2(v' - C_2^{(2)}) = K[-q_1 C_2^{(1)} - q_2 C_2^{(2)}],$$

donde $C_1^{(a)}$ y $C_2^{(a)}$ para $a = 1, 2$, representan los coeficientes elásticos de las constituyentes respectivamente.

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales anterior, se obtiene la ley efectiva del compuesto con condiciones de contacto imperfecto (tipo *spring*) entre las constituyentes, dada por

$$\bar{s} = \left[\langle E_1^{-1}, E_2^{-1} \rangle + K^{-1} \right]^{-1} v'.$$

Usando la condición de continuidad, la fórmula (8), teniendo en cuenta las condiciones de periodicidad y de unicidad de la función local $N^{(1)}(\mathbf{x})$ para el caso de considerar contacto imperfecto (tipo **membrana**) puede ser expresada como

$$E_1(v' - C_2^{(1)}) - a_1 q_1 C_2^{(1)} = E_2(v' - C_2^{(2)}) - a_2 (C_1^{(2)} - q_2 C_2^{(2)}) \quad (10)$$

En este caso, la solución del sistema de ecuaciones lineales formado por las ecuaciones (5) y (10) nos proporciona la ley efectiva del compuesto con condiciones de contacto imperfecta (tipo **membrana**) entre las constituyentes en la forma

$$\bar{s} = \left[I + \{E_1, E_2\} T_1 / \left(\langle E_1^{-1}, E_2^{-1} \rangle + T_1 \right) \right] v' \text{ donde } T_1 = A q_1 q_2 / E_1 E_2, \quad A = a_1 - a_2 \text{ y } \{\bullet, *\} = \bullet q_2 + * q_1.$$

De manera análoga a lo antes descrito, la expresión de las leyes efectivas para los diferentes tipos de contacto pueden ser obtenidas, para los otros dos tipos de intervalos en los que se analiza el comportamiento del compuesto en estudio, es decir, “compuesto elástico lineal y fuertemente no lineal”, en el que una constituyente tendrá comportamiento elástico y la otra comportamiento no elástico, referido al intervalo $\bar{e}_s^{(1)} \leq v' < \bar{e}_s^{(2)}$ y “compuesto fuertemente elástico no lineal puro”, en el que ambas constituyentes tendrán comportamiento no elástico, en el intervalo $v' \geq \bar{e}_s^{(2)}$.

A manera de resumen, la ley efectiva para un compuesto unidimensional, bifásico con constituyentes que satisfacen la ley constitutiva considerada, para los tres tipos diferentes de contacto puede ser formulada en la forma,

$$\bar{S} = \begin{cases} D_1 v' & si & v' < \bar{e}_s^{(1)} \\ D_2 v' + D_3 & si & \bar{e}_s^{(1)} \leq v' < \bar{e}_s^{(2)} \\ D_4 v' + D_5 & si & v' \geq \bar{e}_s^{(2)} \end{cases} \quad (11)$$

Los límites elásticos para la deformación y las constantes D_i ($i = 1, L, 5$) que intervienen en la ley efectiva antes expresada, se recogen en la tabla que se muestra a continuación.

	Contacto perfecto	Contacto imperfecto	
		Tipo Spring	Tipo Membrana
D_1	$\langle E_1^{-1}, E_2^{-1} \rangle^{-1}$	$\left[\langle E_1^{-1}, E_2^{-1} \rangle + K^{-1} \right]^{-1}$	$\frac{1 + \langle E_1, E_2 \rangle T_1}{\langle E_1^{-1}, E_2^{-1} \rangle + T_1}$
D_2	$\langle E_1^{*-1}, E_2^{-1} \rangle^{-1}$	$\left[\langle E_1^{*-1}, E_2^{-1} \rangle + K^{-1} \right]^{-1}$	$\frac{\langle E_1^*, E_2 \rangle T_2 + 1}{\langle E_1^{*-1}, E_2^{-1} \rangle + T_2}$
D_3	$\frac{(E_1 - E_1^*) E_2 e_s^{(1)} q_1}{\langle E_1^{*-1}, E_2^{-1} \rangle}$	$\frac{(E_1 - E_1^*) E_2 e_s^{(1)} q_1}{\langle E_1^{*-1}, E_2^{-1} \rangle + K^{-1}}$	$\frac{(E_1 - E_1^*) (E_2 + T_2) e_s^{(1)} q_1}{\langle E_1^{*-1}, E_2^{-1} \rangle + T_2}$
D_4	$\langle E_1^{*-1}, E_2^{*-1} \rangle^{-1}$	$\left[\langle E_1^{*-1}, E_2^{*-1} \rangle + K^{-1} \right]^{-1}$	$\frac{1 + \langle E_1^*, E_2^* \rangle T_3}{\langle E_1^{*-1}, E_2^{*-1} \rangle + T_3}$
D_5	$\frac{\left[(E_1 - E_1^*) E_2^* e_s^{(1)} q_1 + \right.}{\left. + (E_2 - E_2^*) E_1^* e_s^{(2)} q_2 \right]}{\langle E_1^{*-1}, E_2^{*-1} \rangle}$	$\frac{\left[(E_1 - E_1^*) E_2^* e_s^{(1)} q_1 + \right.}{\left. + (E_2 - E_2^*) E_1^* e_s^{(2)} q_2 \right]}{\langle E_1^{*-1}, E_2^{*-1} \rangle + K^{-1}}$	$\frac{(E_1 - E_1^*) (E_2 + T_3) e_s^{(1)} q_1 + (E_2 - E_2^*) (E_1 + T_3) e_s^{(2)} q_2}{\langle E_1^{*-1}, E_2^{*-1} \rangle + T_3}$
$\bar{e}_s^{(1)}$	$\frac{E_1 e_s^{(1)}}{\langle E_1^{-1}, E_2^{-1} \rangle}$	$\frac{E_1 e_s^{(1)}}{\langle E_1^{-1}, E_2^{-1} \rangle + K^{-1}}$	
$\bar{e}_s^{(2)}$	$\frac{E_1 e_s^{(2)}}{\langle E_1^{-1}, E_2^{-1} \rangle}$	$\frac{E_1 e_s^{(2)}}{\langle E_1^{-1}, E_2^{-1} \rangle + K^{-1}}$	

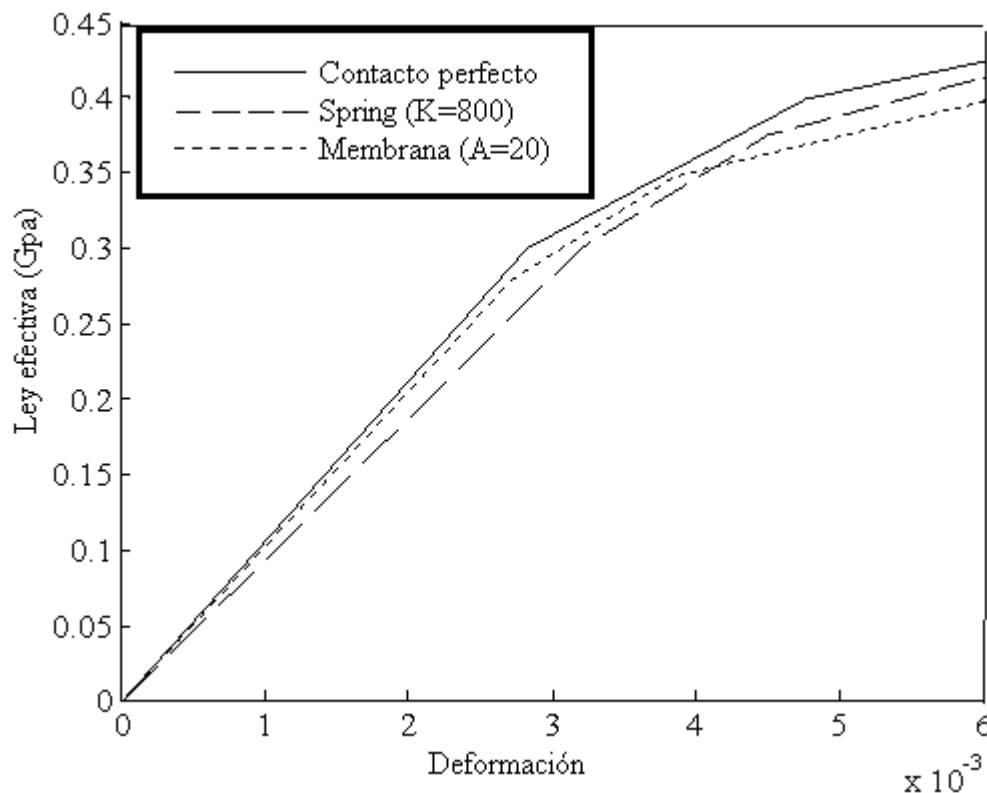
donde $T_1 = \frac{A q_1 q_2}{E_1 E_2}$, $T_2 = \frac{A q_1 q_2}{E_1^* E_2}$ y $T_3 = \frac{A q_1 q_2}{E_1^* E_2^*}$.

Análisis de los resultados

Se realizó el análisis detallado de los casos límites. Se puede notar fácilmente de la tabla que se presenta, que los coeficientes D_i correspondientes al caso de considerar contacto perfec-

to (tipo *spring*) en la interface del compuesto, cuando $K \rightarrow \infty$ se reducen a los coeficientes correspondientes, cuando se considera contacto perfecto en la interfase del compuesto. De manera similar, se puede obtener directamente de lo reflejado en la tabla, que los coeficientes D_i correspondientes al caso de considerar contacto imperfecto (tipo *membrana*) en la interfase del compuesto, cuando $A \rightarrow 0$ se reducen a los coeficientes correspondientes si se considera contacto perfecto en la interfase del compuesto. Del análisis de ambos casos límite, podemos concluir que la ley efectiva antes expuesta, admite como caso límite para el caso de contacto imperfecto (tipo *spring* o *membrana*) en la interfase del compuesto, a la ley efectiva del compuesto para el caso de considerar contacto perfecto entre las constituyentes.

La continuidad de la ley efectiva (11) fue demostrada para todos los valores de su dominio de definición. La Figura 1 muestra el comportamiento de las leyes efectivas del compuesto unidimensional, bifásico con constituyentes “fuertemente no lineal”, formado por las constituyentes Al/Steel, con condiciones de contacto perfecta e imperfecta (tipo *spring* o *membrana*) entre las constituyentes. De lo reflejado en la tabla, se puede concluir que, para cada uno de los intervalos, la pendiente de la recta correspondiente al contacto imperfecto (tipo *spring* o *membrana*) es menor que la pendiente de la recta correspondiente al contacto perfecto, por consiguiente, como todas las curvas comienzan en el mismo punto, la curva de la ley efectiva considerando contacto imperfecto (tipo *spring* o *membrana*) entre las constituyentes, estará siempre por debajo de la curva de la ley efectiva considerando contacto perfecto entre las constituyentes. Además, puede observarse gráficamente también, que las curvas de las leyes efectivas considerando contacto imperfecto (tipo *spring* o *membrana*) se aproximan a la curva de la ley efectiva considerando contacto perfecto cuando $K \rightarrow \infty$ (tipo *spring*) y cuando $A \rightarrow 0$ (tipo *membrana*) que coincide con lo analizado teóricamente a partir de las expresiones de los coeficientes referidos en la tabla anterior. Los materiales utilizados en estos cálculos fueron tomados de [6], considerando los volúmenes de fracción $q_1 = 0.6$, $q_2 = 0.4$. De este análisis se puede notar que el contacto imperfecto entre las constituyentes (tipo *spring* o *membrana*) hace la ley efectiva del compuesto más suave que la ley efectiva del compuesto bajo la consideración de contacto perfecto.



Comparación entre las leyes efectivas de un compuesto laminado bifásico (Aluminio/Acero) para la consideración de contacto perfecto y dos tipos de contacto imperfecto (Spring y Membrana) entre las constituyentes.

De las expresiones de los coeficientes D_i recogidas en la tabla podemos realizar un estudio de los casos límite para los valores del parámetro de la imperfección del contacto, K (tipo *spring*) y A (tipo *membrana*). Considerado D_i^S , D_i^M y D_i^P con $i = 1, 2, 3, 4, 5$ las expresiones de los coeficientes recogidos en la expresión (11) para el caso de considerar contacto imperfecto tipo *spring*, tipo *membrana* o *perfecto*, respectivamente, obtenemos que

$\lim_{K \rightarrow 0} D_i^S = 0$ mientras que $\lim_{K \rightarrow \infty} D_i^S = D_i^P$, lo cual nos corrobora que para $K \rightarrow \infty$ la ley

efectiva obtenida considerando contacto imperfecto (tipo *spring*) reproduce la ley efectiva para el caso en que se considere contacto perfecto, mientras que, cuando $K \rightarrow 0$ se obtendría como valor de la ley efectiva el valor cero, pues si $K \rightarrow 0$ de la expresión (4) implicaría que el contraste de los desplazamientos es infinito y dejaría de tener sentido el compuesto en consideración. En resumen, obtenemos que para el caso de contacto imperfecto (tipo *spring*) se

cumple que $0 \leq D_i^S \leq D_i^P$ con $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Análogamente, tenemos que $\lim_{A \rightarrow 0} D_i^M = D_i^P$ mientras que

$$\lim_{A \rightarrow \infty} D_i^M = \begin{cases} \langle E_1, E_2 \rangle & \text{si } i = 1 \\ \langle E_1^*, E_2 \rangle & \text{si } i = 2 \\ (E_1 - E_1^*) e_s^{(1)} q_1 & \text{si } i = 3 \\ \langle E_1^*, E_2^* \rangle & \text{si } i = 4 \\ (E_1 - E_1^*) e_s^{(1)} q_1 + (E_2 - E_2^*) e_s^{(2)} q_2 & \text{si } i = 5 \end{cases} \quad (12)$$

lo que nos corrobora que la ley efectiva obtenida al considerar contacto imperfecto (tipo **membrana**) entre las constituyentes, admite como caso particular a la ley efectiva al considerar contacto perfecto cuando $A \rightarrow 0$, mientras que para el caso en que $A \rightarrow \infty$ reproduce los valores dados en la expresión (12). En resumen, obtenemos que para el caso de contacto imperfecto (tipo **membrana**) se cumple que $D_i^P \leq D_i^M \leq H$ con $i = 1, 2, 3, 4, 5$, siendo H la expresión referida en (12).

Comparación entre las leyes efectivas de un compuesto laminado bifásico (Aluminio/Acero) para la consideración de contacto perfecto y dos tipos de contacto imperfecto (Spring y Membrana) entre las constituyentes

Agradecimientos

Este trabajo fue patrocinado por el proyecto CONACYT No. 47218-F. El Proyecto Programa de Ciencias Básicas CITMA No. 9/2004 y el Departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Monterrey, Campus Estado de México.

Referencias

- [1] Y. Benveniste, The effective mechanical behavior of a composite with imperfect contact between the constituents. *Mech. Mater.*, vol. 4, pp. 197-208, 1985.
- [2] Y. Benveniste and T. Miloh, Imperfect soft and stiff interfaces in two dimensional elasticity. *Mech. Mater.*, vol. 33, pp. 309-323, 2001.
- [3] B. E. Pobedria, *Mechanics of Composite Materials*. Moscow University Press, Moscow. (in Russian) 1984.
- [4] J. J. Skrzypek, *Plasticity and creep. Theory, examples and problems*. Begel House, USA 1993.
- [5] Y. Hiki and A. V. Granato, Anharmonicity in noble metals; higher order elastic constants. *Phys. Rev.*, vol. 144(2), pp. 411-419, 1966.
- [6] H. Czichos, (Editor), *HUETTE - Grundlagen der Ingenieurwissenschaften*, Springer, Berlin, pp. D45-D50, 2000.