

**REPÚBLICA DE CUBA**  
**INSTITUTO SUPERIOR PEDAGÓGICO**  
**“ENRIQUE JOSÉ VARONA”**  
**FACULTAD DE CIENCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA UTILIZACIÓN  
DE LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LAS  
COMUNICACIONES EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-  
APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES MATEMÁTICAS**

**Tesis presentada en opción al grado científico de  
Doctor en Ciencias Pedagógicas**

**Autor: M.Sc. José Benito Rodríguez Sosa**

**Tutora: Dra. Sylvia Lima Montenegro**

**Ciudad de la Habana**

**Año 2003**

## **AGRADECIMIENTOS:**

Si tuviera que comenzar nuevamente la investigación tendría el cuidado de anotar cada día los nombres de todos los compañeros que me brinden su colaboración, una palabra de aliento, que me demuestren su preocupación por mi trabajo. Al expresar mis agradecimientos corro el riesgo de olvidar a algún compañero o compañera. Créanme que el olvido es totalmente involuntario. Por esta razón, antes de mencionar nombres, quiero agradecer a todos los que de una forma u otra me han ayudado.

Mis agradecimientos para todos los profesores del Departamento de Matemática, que asumieron muchísimas tareas para que yo me pudiera dedicar a la elaboración de la tesis, muy en especial a Lourdes Báez y a Cosme Matías.

Por sus colaboraciones y consejos agradezco particularmente a mis compañeros: Judith Fernández, Margarita Gort, Maritza Vázquez, Magdalena Vázquez, Eva Escalona, Mirtha Velazco, Deysi Fraga, Cristina González, José Ron, Luisa García y a los doctores Héctor Jiménez, Paúl Torres, Justo Che Soler, Sergio Ballester, Victoria Arencibia, Miguel Llivina, René Hernández, María Victoria Chirino, Luis Enrique Lezcano, Daniel González, Jaime Cruañas y Rolando Valdés Castro..

Un agradecimiento muy especial para mi hermana y sobrinos, por su ayuda inconmensurable y para María Helena, Fernando e Higinio de la escuela del MIMBAS.

A Walter Alcázar le estaré eternamente agradecido.

Muchas gracias a todos los especialistas que colaboraron con la realización de esta tesis en calidad de expertos.

Un reconocimiento especial para los doctores Celia Rizo y Luis Campistrous, pues sus observaciones y recomendaciones fueron decisivas para la culminación de esta tesis.

El mayor de los agradecimientos para mi tutora, la Doctora Sylvia Lima Montenegro, por haberme motivado para iniciar el trabajo en el doctorado, por haber confiado en mi y por su dedicación, profesionalidad y rigor en el asesoramiento de esta tesis.

## **DEDICATORIA:**

A mi Madre y a mi tía Sara. ¿Quién dijo que ya no están?

A mi hijo, mi mejor obra.

## **SÍNTESIS:**

Los avances experimentados en la ciencia y la técnica, han convertido al siglo XXI en el siglo de la información. Se han introducido nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones que permiten generar, procesar e intercambiar información, produciéndose una socialización significativa del uso de las mismas a la cual no está ajena la educación.

Son numerosas las experiencias nacionales e internacionales de utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones con el objetivo de mejorar el aprendizaje de los estudiantes, especialmente en Matemática.

La presente tesis es el resultado de la investigación de su autor acerca de la utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones para lograr un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de las funciones matemáticas, que, consecuentemente, produzca una contribución al desarrollo de pensamiento funcional matemático de los/las estudiantes que se preparan como profesores en los Institutos Superiores Pedagógicos.

Como resultados fundamentales se ofrecen: una propuesta metodológica para la utilización de la Informática con los fines mencionados, que ha sido valorada utilizando el método de expertos Delphy y la sistematización de la teoría relativa al proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones matemáticas utilizando las tecnologías informáticas.

# ÍNDICE

## INTRODUCCIÓN

### CAPÍTULO I.

#### FUNDAMENTOS TEÓRICOS

- 1.1- El concepto de función en la historia
- 1.2- El pensamiento funcional matemático
- 1.3- Panorámica de la línea directriz  
“Correspondencia, transformación, función”
- 1.4- El proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador
- 1.5- Los mapas conceptuales
- 1.6- La mediación pedagógica de las tecnologías
- 1.7- La Informática y la enseñanza

### CAPÍTULO II.

UNA APROXIMACIÓN A LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA: UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL TRABAJO CON LAS FUNCIONES LINEALES UTILIZANDO EL DERIVE

### CAPÍTULO III.

PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA UTILIZACIÓN DE LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LAS COMUNICACIONES CON EL OBJETIVO DE PROPICIAR UN PROCESO DE ENSEÑANZA.-APRENDIZAJE DESARROLLADOR DE LAS FUNCIONES MATEMÁTICAS.

## CONCLUSIONES

## RECOMENDACIONES

## BIBLIOGRAFÍA DEL AUTOR SOBRE EL TEMA BIBLIOGRAFÍA

## ANEXOS

## **INTRODUCCIÓN:**

La Matemática juega un papel fundamental en el conjunto de las diferentes ciencias particulares. Numerosos historiadores señalan su aparición como Ciencia en el período griego de su desarrollo, en los siglos VII-VI a.n.e.

Por su parte la historia se ha encargado de demostrar que lo determinante en el desarrollo de la Ciencia, en particular de una ciencia tan abstracta como la Matemática, lo constituyen las exigencias de la realidad material. Partiendo de problemas geométricos, físicos, económicos y de la técnica y otras ciencias particulares se crean las definiciones, proposiciones y teoremas con los que se da solución a dichos problemas. Aunque el desarrollo alcanzado por la Matemática ha propiciado que se construyan teorías aparentemente desligadas de la realidad material, generalmente llegan a encontrar su aplicabilidad en la resolución de algún problema de otras ciencias o de la vida cotidiana.

La creación de definiciones como número, variable, término, dependencia funcional y funciones, entre otros, ha permitido estudiar complejos procesos que tienen lugar en la realidad objetiva.

“Las cantidades que intervienen en todo proceso, como regla, no varían independientemente unas de otras; con frecuencia tales cantidades se encuentran en una estrecha vinculación, de forma que cualquier variación de una, por pequeña que sea, implica una variación de la otra. Estas cantidades que varían unas en dependencia de otras, en un cierto fenómeno o proceso, se dice que están en dependencia funcional.” (210:186).

Son numerosos los procesos en que se ponen de manifiesto dependencias funcionales, desde la dependencia del espacio con respecto al tiempo en el movimiento rectilíneo uniforme, el crecimiento de una población de bacterias, el lanzamiento de un proyectil, hasta procesos tan complejos como las funciones del cerebro.

“El concepto de dependencia funcional se expresó inicialmente a través de la representación en una tabla numérica de la variación de los parámetros que determinaban un lugar geométrico”. (210:186).

Las necesidades de la práctica propiciaron el surgimiento de los medios necesarios para expresar una función matemática. Fue Descartes el que posibilitó, con la introducción del concepto “cantidad variable”, que en el siglo XVII se pudiera llegar a representar dependencias funcionales a través de gráficas y de fórmulas analíticas. Los nombres de B. Bolzano, N. Lobachevski y P.G. Dirichlet aparecen relacionados con la definición de función como correspondencia de índole completamente general.

Para la Matemática, que en sus investigaciones busca relaciones y dependencias, las funciones ocupan un lugar de importancia suprema, partiendo del hecho de que el hombre en su accionar en la naturaleza logra solucionar diversos problemas con la ayuda de las mismas. Estas, sin duda alguna, posibilitan demostrar la relación “Matemática-realidad objetiva” y contribuyen a entender a esta ciencia como un medio eficaz para transformar dicha realidad.

Por estas razones, entre otras no menos importantes, el estudio de las funciones matemáticas constituye tema obligado en el currículo de la formación general de cualquier país. En Cuba se abordan como parte de la línea directriz “Correspondencia, transformación, función”, la cual transcurre a lo largo de toda la enseñanza. El concepto de función se prepara a largo plazo, comenzando con la comprensión por parte de los alumnos de las ideas del concepto de correspondencia y no es hasta la enseñanza media en que se concluye la etapa propedéutica en la formación del concepto, se define función como correspondencia entre dos conjuntos y se profundiza, al definirla como conjunto de pares ordenados y mediante el trabajo con las diferentes clases de funciones. El estudio de la diferenciación, integración, series, ecuaciones diferenciales y otros temas relacionados con las funciones le corresponde a la Educación Superior.

El tratamiento de las funciones en la escuela cubana está encaminado a la comprensión del concepto de función como correspondencia entre dos

conjuntos y como conjunto de pares ordenados, a sus diferentes formas de representación, al desarrollo de habilidades en su representación gráfica y al dominio de propiedades y la relación entre el gráfico y dichas propiedades, y a la resolución de problemas vinculados con la vida práctica. Uno de los problemas fundamentales que se presentan es el relacionado con la graficación. En este último aspecto influye desfavorablemente la utilización de medios de enseñanza e instrumentos de dibujo que no propician el trabajo con la celeridad y exactitud necesarias.

Es criterio del autor de esta tesis que no se logra el desarrollo del pensamiento funcional matemático en los/las estudiantes, lo que ha podido verificar en las observaciones realizadas a las clases de los profesores de la Enseñanza General Media, a practicantes de la carrera de Matemática-Computación y a profesores de Matemática del I.S.P. "Enrique José Varona", situación a la que ha tenido que enfrentarse en sus años de experiencia como profesor en la impartición del tema.

Los resultados de las pruebas de ingreso a la Educación Superior y los diagnósticos realizados a los/las estudiantes que ingresan a la carrera de formación de profesores de Matemática contribuyen a reafirmar el criterio planteado anteriormente y motivan reflexiones acerca del tratamiento metodológico que se está realizando de la línea directriz y de la preparación de los profesores en formación para enfrentar este problema.

Por otra parte para llevar adelante la Batalla de Ideas en la que está inmerso el pueblo cubano es necesario que los adolescentes y jóvenes se formen como personas comprometidas totalmente con el progreso de la sociedad socialista. En concordancia con este planteamiento se están realizando grandes esfuerzos para lograr que todas las escuelas dispongan de las tecnologías de la información y las comunicaciones, teniendo en cuenta que con el diseño adecuado de su inserción en el proceso de enseñanza-aprendizaje provoca cambios que favorecen su desarrollo y permiten en muchos casos "el autoaprendizaje, el autoentrenamiento y la autovaloración en el avance de lo que se estudia" (95:9), por lo que se impone a los profesores la responsabilidad de diseñar de inmediato su introducción en el proceso y contribuir de esta



manera a “... revolucionar hasta sus raíces la enseñanza secundaria en nuestro país, y con la misma línea, hacia delante, los niveles universitarios y científicos” (46:3).

“El uso de estos medios ofrece importantes oportunidades para el aprendizaje de los estudiantes y de los docentes, para la gestión y para la administración del sistema educativo y de las escuelas, y para el intercambio de conocimientos y de experiencias” (227:17)

Una razón poderosa para introducir estas tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje es que “desde el punto de vista educativo contribuyen a la transformación de la personalidad de los estudiantes, les permiten prepararse de manera más amplia en su profesión, optimizar su tiempo y adentrarse en los sistemas modernos de búsquedas de información.” (199:1).

El pensamiento matemático es una forma racionalizada del pensamiento, de aquí que la educación en este tipo de pensamiento es de una importancia extraordinaria para todas las esferas de las ciencias y para la vida diaria. Un aspecto de vital importancia para desarrollar el pensamiento matemático es la abstracción de invariantes, Pero, para reconocer “... lo que no cambia se debe observar el fenómeno en su variación. En este sentido los medios dinámicos hacen mucho más fácil esta tarea a profesores y alumnos, y entre los medios de enseñanza dinámicos, la computadora y los software educativos ocupan un lugar principal” (200:13).

Sin embargo, en las entrevistas realizadas a los profesores, se pudo apreciar la falta de preparación de muchos de ellos para utilizar las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones con el objetivo de contribuir al desarrollo del pensamiento matemático y en particular del pensamiento funcional matemático.

Por estas razones “los centros formadores de maestros, deben ser la vanguardia en la introducción de las tecnologías de la información y de las comunicaciones, tanto en la enseñanza presencial como a distancia, de modo que sus egresados estén en condiciones de generar experiencias innovadoras, a partir del aprovechamiento de las bondades de esta tecnología” (145:1).

Las valoraciones anteriores fundamentan la formulación del **problema científico** de esta investigación:

¿Cómo utilizar las tecnologías de la información y las comunicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones matemáticas en los Institutos Superiores Pedagógicos?

El **objeto** de esta investigación es el proceso de enseñanza–aprendizaje de las funciones matemáticas en los Institutos Superiores Pedagógicos. El **campo de acción** es la metodología de la enseñanza de las funciones matemáticas en los Institutos Superiores Pedagógicos, utilizando la Informática.

Existen numerosas experiencias acerca del empleo de la Informática con la finalidad de elevar la calidad del proceso docente-educativo: Palmitter (1991), Kaput, (1992), Pérez-Fernández (1996), Valdés (1996), Ríos y Cebrián (2000), Alemán (2001), Colectivo de autores del I.S.P. “José Antonio Echeverría” (2002), Salgado (2002), pero en la bibliografía consultada no existe una metodología totalmente elaborada para su utilización en la dirección de un proceso de enseñanza-aprendizaje del tema que propicie un aprendizaje cooperativo, que contribuya a la formación de una personalidad integral de los estudiantes, “que considere las distintas dimensiones del ser humano que están estrechamente vinculadas entre sí: los aspectos afectivos y emocionales, las relaciones interpersonales, las capacidades de inserción y actuación social, el desarrollo cognitivo, y el desarrollo ético y estético” (227:13), como propugnan los creadores de la teoría sobre proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador.

Por lo tanto, a partir de las observaciones anteriores, se declara como **objetivo** de esta investigación:

Elaborar una propuesta metodológica para la utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones que propicie un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de las funciones matemáticas en los en los Institutos Superiores Pedagógicos.

Para abordar el problema planteado y su posible solución fue necesario responder las siguientes **preguntas**:

- ¿Cuáles son los antecedentes históricos en la elaboración del concepto de función y el tratamiento metodológico que se ha realizado de las funciones matemáticas con vistas a lograr el desarrollo del pensamiento funcional matemático de los estudiantes?
- ¿Qué aspectos teóricos relacionados con la utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones en la enseñanza deben ser considerados para lograr un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de las funciones matemáticas?
- ¿Qué aspectos teóricos y prácticos se deben contemplar para la concepción, elaboración y validación de una propuesta metodológica para la utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones que propicie la realización de un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de las funciones matemáticas?

Para el logro del objetivo propuesto se realizaron las siguientes **tareas**:

- Identificación de los fundamentos teóricos a partir del estudio de la bibliografía relacionada con las funciones matemáticas, su historia y tratamiento metodológico, medios de enseñanza, concepciones sobre aprendizaje, nuevas tecnologías informáticas, desarrollo del pensamiento, Didáctica General y experiencias sobre la utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones en la enseñanza.
- Estudio de las regularidades de la utilización de la Informática en función del logro de un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de las funciones matemáticas.
- Elaboración de una propuesta metodológica para la utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones que propicie un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de las funciones matemáticas en los en los Institutos Superiores Pedagógicos
- Realización de una experiencia de constatación con estudiantes del primer año de la carrera de Matemática-Computación.
- Valoración de la propuesta metodológica a partir del criterio de expertos

Los **Métodos** utilizados en esta investigación fueron:

Métodos del **nivel teórico**:

- Histórico y lógico: para profundizar en el proceso de formación del concepto de función en el tiempo en la historia, sus tendencias actuales y para identificar los procedimientos que históricamente se han utilizado para la impartición de estos contenidos.
- Analogía: en la búsqueda de regularidades en el empleo de las tecnologías de la información y las comunicaciones en la enseñanza de la Matemática.
- Modelación: en la experiencia de constatación efectuada con los estudiantes de la carrera de Matemática-Computación.
- Enfoque de sistema: en el estudio del proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones matemáticas.

Métodos del **nivel empírico-experimental**:

- Entrevistas a profesores para conocer sus criterios acerca de la utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones en la enseñanza, lo que permitió fundamentar el problema de esta investigación.
- Observación de clases a profesores de Matemática para determinar las posibles causas del insuficiente desarrollo del pensamiento funcional matemático.
- Medición en la aplicación de los diagnósticos.

Métodos **estadísticos**:

- Se utilizó la prueba estadística de Mc Nemar para la significación de cambios durante la realización de la experiencia con los estudiantes de Matemática-Computación.

Se utilizó además el Método de expertos Delphy para valorar la propuesta metodológica y un sistema de indicadores para medir el desarrollo del pensamiento funcional.

La tesis está conformada, además de esta introducción por tres capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos. El primer capítulo está dedicado a la fundamentación teórica, relacionando de manera orgánica los

elementos teóricos que contribuyen a fundamentar la propuesta metodológica. En el segundo capítulo se presenta una aproximación a la solución del problema a partir de la realización de una experiencia de utilización de asistentes matemáticos informatizados en el tema de Funciones lineales, con estudiantes de la Carrera de Matemática-Computación del I.S.P. “Enrique José Varona”, a partir de la cual se pudieron realizar generalizaciones, que son plasmadas en la propuesta metodológica general en el capítulo tercero, la cual fue valorada por medio de la aplicación del Método de expertos Delphy.

La bibliografía consultada es amplia y de la actualidad necesaria para el tratamiento del problema que se aborda en la tesis.

Los **aportes** que se realizan en esta tesis son los siguientes:

**En el plano teórico:**

- Una propuesta metodológica que permite sistematizar la teoría relativa al proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones matemáticas utilizando tecnologías informáticas.
- Caracterización del proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de las funciones matemáticas utilizando las tecnologías de la información y las comunicaciones.

**En el práctico:**

- Un sistema de indicaciones metodológicas para la utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones en función de un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de las funciones matemáticas.
- Un sistema de indicaciones metodológicas para el trabajo con las funciones lineales utilizando el DERIVE con el objetivo de contribuir al desarrollo del pensamiento funcional matemático de los estudiantes.

Por su propia naturaleza la propuesta tiene una gran significación práctica, ya que al diseñar el trabajo con las tecnologías de la información y las comunicaciones en las clases sobre las funciones matemáticas, no sólo se está relacionando a los estudiantes con los avances más recientes de la ciencia y la técnica, sino que, a partir del ahorro de tiempo que se logra es posible abordar una gran cantidad de problemas relacionados con otras ciencias particulares y

de la vida cotidiana, dándole un enfoque interdisciplinario al proceso de enseñanza-aprendizaje, que contribuye a la formación integral del nuevo hombre que necesita la sociedad en el siglo de la informatización y se produce un aporte considerable al desarrollo de las habilidades profesionales de los futuros profesores.

Los resultados parciales de esta investigación fueron presentados en los siguientes eventos:

- VII Congreso Nacional de Matemática y Computación. Manzanillo 2000.
- IV Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. Instituto Superior Politécnico “José Antonio Echeverría”, 2000, Ciudad de la Habana.
- Evento de la Cátedra “Dulce María Escalona” sobre la enseñanza de la Matemática y la Computación 2001. I.S.P “Enrique José Varona”. Ciudad de la Habana.
- Evento de la Cátedra “Dulce María Escalona” sobre la enseñanza de la Matemática y la Computación 2001. I.S.P “Rubén Martínez Villena”. Provincia Habana.
- Reunión Científica de profesores. Pedagogía y Forum de Ciencia y técnica. 2001. I.S.P “Enrique José Varona”. Ciudad de la Habana.
- Didáctica de las Ciencias 2001. I.S.P “Enrique José Varona”. Ciudad de la Habana.
- Taller de la Cátedra “Dulce María Escalona” 2002. I.S.P “Enrique José Varona”. Ciudad de la Habana.
- TelEduc 2002. Ciudad de la Habana.
- Evento de la Cátedra “Dulce María Escalona” sobre la enseñanza de la Matemática y la Computación 2003. I.S.P “Enrique José Varona”. Ciudad de la Habana.
- TelEduc 2003. Ciudad de la Habana.

Se realizaron las siguientes publicaciones: .

- “Ambiente colaborativo en el aprendizaje de la Matemática. Asistentes, tutoriales y tecnología web”. Memorias del IV Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. Instituto

Superior Politécnico “José Antonio Echeverría”, Ciudad de la Habana 2000.

- “El concepto de función bajo los presupuestos de la teoría marxista”, Revista electrónica Orbita Científica, Número 3, Volumen 1. Ciudad de la Habana. 2001
- “La Utilización de la Tecnología de la Información y la Comunicación en la Transformación del Aprendizaje de la Matemática”. Memorias del evento TelEduc 2002. Ciudad de la Habana, 2002

## **CAPÍTULO I: FUNDAMENTOS TEÓRICOS.**

En este capítulo se presentan de manera sintética los aportes principales de hombres de ciencia a lo largo de la historia en relación con la formación del concepto de función que se utiliza en nuestros días y los aspectos más significativos en el tratamiento metodológico de este concepto, en función del desarrollo del pensamiento funcional matemático de los/las estudiantes. Se dedican sendos epígrafes al proceso de enseñanza aprendizaje desarrollador y a una de las técnicas que complementan a los métodos propiciadores de dicho proceso, los mapas conceptuales. Puesto que se persigue introducir las tecnologías de la información y las comunicaciones en la enseñanza de las funciones, fue necesario complementar este capítulo con epígrafes dedicados a la mediación de las tecnologías, en particular de la Informática y el papel de esta última en la educación, especificando su utilización en la enseñanza de la Matemática. En el anexo # 1 se muestra un esquema que ilustra la relación entre los epígrafes que conforman este capítulo.

Se integran de esta manera aspectos teóricos esenciales que permiten crear las bases para la elaboración de la propuesta metodológica que se presenta en una primera aproximación en el segundo capítulo y de manera general en el tercero.

### **1.1- El concepto de función en la historia.**

En la perspectiva de la construcción social del conocimiento, se puede afirmar que la naturaleza del concepto de función es extremadamente compleja:

“ su desarrollo se ha hecho casi a la par del humano, es decir, encontramos vestigios del uso de correspondencias en la antigüedad, y actualmente se debate sobre la vigencia, en el ámbito de las matemáticas, del paradigma de la función como un objeto analítico. Empero, el concepto de función no devino protagónico hasta que se le concibió como una fórmula, es decir, hasta que se



logró la integración entre dos dominios de representación: el Álgebra y la Geometría. La complejidad del concepto de función se refleja en las diversas concepciones y diversas representaciones con las que se enfrentan los estudiantes y profesores.” (40:173).

Las primeras señales de una noción bastante distante de la actual definición de función se encuentran en tablas de correspondencias confeccionadas a partir de la observación de fenómenos naturales.

“Las tablas de cálculo de la Matemática babilónica, algunas tendencias de la teoría de las secciones cónicas de Apolonio o las tablas astronómicas del Almagesto pueden considerarse como antecedentes del desarrollo del concepto función”. (237:148)

Thomas Bradwardine abordó el concepto de función potencia en su tratado "Tractatus de proportionibus", en 1328. Posteriormente aparecieron diversos trabajos en los cuales se desarrolla la teoría de las proporciones en relación con esta función.

Nicole Oresme (1323-1382), obispo de Normandía, en su "Algorismus proportionum", exploró las reglas para manipular las funciones potencia y es el primero que concibió la noción de potencias fraccionarias; utilizando las expresiones de "latitud" y "longitud" para la representación de las trayectorias de los astros, llegó a la representación gráfica. Muchos historiadores de la Matemática consideran que Oresme con las palabras "latitudo formarum" introdujo el germen de la idea de función (238:46).

Descartes al aplicar métodos algebraicos en la Geometría, propició la introducción de la noción de función en relación con las curvas.

Engels en este sentido escribió: “El comienzo de una nueva época en la Matemática estuvo marcado por la magnitud variable de Descartes. Sin esto no se hubiera hallado el movimiento y la dialéctica en la Matemática, ni se hubiera hallado enseguida, con necesidad, el cálculo diferencial o integral, que comenzó inmediatamente, siendo completado, en general, por Newton y Leibniz.” (237:149).

La introducción por parte de Descartes del concepto “cantidad variable” condujo a representar las dependencias funcionales a través de gráficos y fórmulas analíticas.

“Newton, en su "Methodus fluxionum" (escrito en 1671, pero publicado en 1736) hace uso de la locución "relata quantitas" expresión que se aproxima bastante al sentido de la palabra función.” (173:164)

Fue Leibniz el primero que utilizó la palabra función. En un tratado de 1673 habla de la relación entre ordenadas y abscisas y “otros tipos de líneas en una figura dada realizan alguna función” (237:149).

Jean Bernoulli (1667-1748) utilizó como símbolo la letra griega  $\sigma$ , para representar una función de una variable. En 1718, planteó una primera definición explícita del concepto de función.

Crear una teoría de funciones se convirtió en el siglo XVIII en el principal problema del Análisis infinitesimal. Euler, uno de los más grandes matemáticos de todas las épocas, escribió entonces que “todo el Análisis infinitesimal gira alrededor de las cantidades variables y sus funciones” (210:188).

Los aportes de L. Euler (1707-1783) en esta dirección fueron significativos:

- Fue el primero que empleó los paréntesis y la letra f inicial de función.
- Ofreció una definición de variable.
- En el primer volumen de su "Introductio in analysis infinitorum" (1748) se puede encontrar una precisión hecha al concepto función de Bernoulli:
- Denotó las constantes con a,b,c; las variables con x,y,z e introdujo una clasificación de las funciones como algebraicas o trascendentes, explícitas o implícitas, uniformes o multiformes.
- En el segundo volumen hizo la distinción entre una curva "continua" y una "discontinua",
- Planteó otra definición de "función": "la relación entre Y y X, expresadas sobre el plano por una curva trazada a mano libre". (Lagrange siguió la idea expresada en la primera definición, en tanto que Fourier siguió la idea de la segunda definición).

- Formuló otra definición de función en el prefacio de su obra "Institutiones calculi differentialis", en 1755. En esta nueva definición de función destaca una relación arbitraria entre las cantidades variables de una dependencia cualquiera.

Esta nueva definición no tardó en encontrar seguidores. Uno de los primeros sabios que la adoptó fue el matemático y político francés Condorcet. Su concepción fue expuesta en su conferencia sobre Cálculo integral de 1765. Él planteó una definición de función muy próxima a la contemporánea.

“Distinguió tres tipos de funciones:

- funciones cuya forma es dada,
- funciones que no son determinadas más que por una ecuación entre  $F$  y las cantidades donde ella es función,
- funciones que no son dadas más que en ciertas condiciones, como por ejemplo, los radios vectores de los planetas que son funciones del tiempo, de las masas, etc...” (173:167)

J. L. Lagrange (1736,1813) no tenía ideas totalmente divergentes de las de Euler sobre la concepción de función, lo que se puede observar en la definición que planteó en su obra "Teoría de funciones analíticas..."

“Las condiciones excepcionalmente desfavorables en los cuales vivió y trabajó Bolzano fueron la causa de que casi todos sus trabajos vieron la luz sólo después de su muerte.” (190:367). Si sus trabajos se hubieran publicado cuando los escribió se hubiera acelerado el curso de los acontecimientos relacionados con las funciones y la fundamentación del Análisis Matemático. Sus resultados sobre continuidad de funciones fueron notables.

“En el transcurso de un largo período (todo el siglo XVIII y comienzos del siglo XIX) el concepto de función se continuó asociando al de fórmula analítica. Esta tendencia, formalista por su carácter (pues la forma-representación analítica dictaba sus leyes al contenido real de la correspondencia funcional) se mantuvo durante más de un siglo...” (210:188) y no se ha eliminado totalmente en la actualidad.

J. B. Fourier (1768-1830) en su obra "Termología", de 1822, dejó claro que debía plantearse la dependencia recíproca de las magnitudes como principio de la definición del concepto función.

Frege, por su parte, intentó reformular la idea de función hacia 1831. P. G. Dirichlet (1805-1859), definió los conceptos de función y de continuidad en 1840. Su definición de función no está solamente desprovista de "expresión analítica" sino lo que es más notable, "...es que ella llega a la descripción de correspondencia unívoca de una manera bastante lúcida. En lo que concierne a la continuidad, trata solamente la continuidad global." (135:71)

Esta definición coincide casi totalmente con la que había dado Lobachevski en 1834, que señaló definitivamente el camino hacia la definición moderna de función.

En la definición del concepto de función de B. Riemann (1826-1866), planteada en 1851, se aprecia la concepción de correspondencia.

Weierstrass da la definición de función, anteponiendo reservas sobre su gran generalidad y no atribuye la paternidad de la definición únicamente a Dirichlet, sino también a Fourier y a Cauchy.

En "Capítulos seleccionados de la teoría de funciones", considera la idea de función como una relación aritmética entre dos variables, da la definición de función como correspondencia entre los elementos y llega a la conclusión de que mientras esta correspondencia es continua, esas dos nociones son las mismas.

K. Weierstrass es el matemático que dio a la definición de función un aspecto conjuntivista.

En 1870 el matemático alemán Hankel rompe con la condición de que la función fuera definida mediante una fórmula.

"En 1872 el famoso matemático alemán Félix Klein consideró un tipo particular de funciones: aquellas en las que el dominio e imagen son el mismo conjunto." (163:17).

En 1875, G. Darboux (1842-1917) escribió: "... existen funciones discontinuas que disfrutan de una propiedad que se mira algunas veces como la

característica distintiva de las funciones continuas, aquella de no poder variar de un valor a otro sin pasar por todos los valores intermedios".(173:171)

En 1895 Schröder planteó las propiedades que caracterizan a las funciones como casos particulares de relaciones.

A. Lebesgue (1875-1941) planteó que en Francia se definía una función continua como aquella que no puede pasar de un valor a otro sin tomar todos los intermedios, y se consideraba esta definición equivalente a la de Cauchy. Darboux demostró que las dos definiciones eran muy diferentes.

En el Inicio del siglo XX Lebesgue apuntaba que, después de Dirichlet y Riemann se está generalmente de acuerdo en decir que existe una función cuando hay correspondencia entre un número  $y$ , y números  $x_1, x_2, \dots x_n$  sin preocuparse del procedimiento que sirve para establecer esta correspondencia y que muchos matemáticos parecen no considerar como funciones más que aquellas que son establecidas por correspondencias analíticas.

En la misma época, Frechet, Eliakin, Hasting Moore trabajaban en el concepto actual de función. Frechet en 1904 generalizó la definición de función. Así, la concepción actual de función se formuló entre los años 1904 y 1909.

Peano formuló en 1911 la definición de la función como subconjunto del producto cartesiano, así como ciertas propiedades, utilizando las investigaciones sobre la teoría de las funciones y las de lógica matemática.

En la época moderna un problema cardinal ha estado relacionado con el hecho de que los matemáticos han seleccionado sus definiciones en dependencia de las teorías que han querido desarrollar:

Caratheodory definió la función como una correspondencia de un conjunto sobre el conjunto de los números reales, en 1917.

Bourbaki planteó la definición de función como un cierto conjunto del producto cartesiano de dos conjuntos, en 1939. La importancia intrínseca de esta evolución del concepto de función, es que ella reformuló los principios del Análisis. "Particularmente, considerando la función como una correspondencia, se agrandan los conceptos llamados "clásicos" como por ejemplo continuidad, continuidad uniforme, discontinuidad, estudiando ahora los conceptos de semi-continuidad (lateral o no), oscilación de una función, función de variación

acotada; nociones que deben su aparición a la nueva definición de función como correspondencia y por el cerco de las propiedades topológicas de los conjuntos de puntos.” (173:174).

En la primera década del siglo XX, la definición de Dirichlet-Bourbaki se asentó en los libros de texto y en los años 60 se presentaban básicamente tres tipos de definición de función:

- funciones definidas en términos de variables,
- funciones definidas en términos de conjuntos,
- funciones definidas en términos de una regla de correspondencia.

También se presentaron funciones definidas en términos de INPUT-OUTPUT, vinculadas con el desarrollo de la Informática.

Lo expuesto en este epígrafe contribuye a reafirmar el planteamiento sobre la dependencia del surgimiento y desarrollo de las funciones de las necesidades de la práctica y los notables esfuerzos de innumerables matemáticos hasta arribar a la definición que se utiliza en la actualidad, que necesariamente continuará evolucionando según lo exijan las condiciones que impongan los avances de la ciencia y la técnica a las nuevas generaciones.

Para el autor de esta tesis han quedado resaltados de esta manera los contenidos básicos que dieron origen al tratamiento metodológico del concepto de función que se realiza actualmente, que fundamentan además la estructuración de la línea directriz “Correspondencia, transformación, función”, de la cual se ofrece una panorámica en el tercer epígrafe. Estos contenidos se reflejan en tres momentos fundamentales:

- la elaboración de una primera definición explícita del concepto de función, para lo que fue necesario un largo camino que comenzó con la observación de fenómenos naturales a partir de los cuales se confeccionaron tablas de correspondencias, la representación de trayectorias de los astros que propició la representación gráfica, la introducción del concepto de magnitud variable que permitió la representación de dependencias funcionales a través de gráficos y fórmulas analíticas y se completó con el análisis de relaciones entre ordenadas y abscisas y la utilización de una simbología.

- el surgimiento de las diferentes clases de funciones y sus propiedades constituye otro de los puntos esenciales cuyo estudio permite fijar el concepto de función.
- el surgimiento de la definición de función como cierto conjunto del producto cartesiano de dos conjuntos, lo que propicia una profundización del concepto de función.

Como se verá posteriormente la línea directriz se completa con el tratamiento de la diferenciación e integración de funciones que, surgiendo también de necesidades prácticas, contribuyen a la fijación del concepto de función.

Un objetivo esencial de esta línea directriz es el desarrollo del pensamiento funcional matemático de los estudiantes a lo que contribuye, indudablemente, el debate del decursar histórico del surgimiento del concepto de función a partir de las necesidades de la realidad objetiva, las contradicciones entre los científicos, los avances y retrocesos en la estructuración de la teoría y el regreso a la realidad objetiva para solucionar los problemas que le dieron origen. Pero, ¿Qué se entiende por pensamiento funcional matemático?

## **1.2- El pensamiento funcional matemático.**

Es posible encontrar tantas definiciones de pensamiento como escuelas de Psicología existen. Se destacan, entre otras:

La definición de pensamiento de S.L. Rubinstein en “El Ser y la Conciencia”:

“... consiste en una penetración en nuevas capas de lo existente, de modo que se excava y se saca a la luz del día algo hasta entonces en ignotas profundidades; consiste en plantear y resolver problemas del ser y de la vida; consiste en buscar y hallar respuesta a la pregunta de cómo es en realidad lo que se ha hallado, qué hace falta para saber como vivir y qué hacer.” (Citado por Labarrere), (139:1)

La definición planteada por Smirnov, Leontiev y otros en “Psicología”:

“... el pensamiento se puede definir como el reflejo generalizado de la realidad en el cerebro humano, realizado por medio de la palabra, así como de los conocimientos que ya se tienen y ligado estrechamente con el conocimiento sensorial del mundo y con la actividad práctica de los hombres.” (217:235)

Existen otras definiciones que se acercan de una manera u otra a las anteriores como las de Leontiev (1975) y Córdova (1979).

Resaltan en estas el papel del pensamiento en la resolución de problemas y la importancia de los conocimientos que ya se tienen para poder arribar a conclusiones, así como la peculiaridad del pensamiento de ser un proceso dirigido.

“Se conocen múltiples trabajos, programas, proyectos de investigación y concepciones que se ocupan de influir en el desarrollo intelectual de los niños, adolescentes y jóvenes. Estos siguen tres direcciones básicas:

- Los que se enmarcan en la dirección de enseñar a pensar, se refieren a la enseñanza de operaciones del pensamiento, seleccionando en la mayoría de los casos, la vía extracurricular para lograrlo.
- Dentro de la dirección enseñar acerca del pensar, se incluyen los que consideran que los individuos deben meditar y concientizar cómo ocurre u opera su pensamiento. Utilizan como forma de trabajo la vía extracurricular.
- Entre los que siguen la dirección enseñar para pensar, se concibe planificar contenidos curriculares o extracurriculares para desarrollar el pensamiento. Le otorgan un papel importante al contenido que es objeto de asimilación por parte del alumno.” (239:116)

El pensamiento aparece siempre ligado a una modalidad específica de actividad: “Cada tipo específico de actividad transmite- por así decirlo- al pensamiento peculiaridades distintivas” (139:4).

Es usual encontrar en la literatura referencias a diversos tipos de pensamiento, ligados al tipo de actividad; entre otros, se habla del pensamiento histórico, el pensamiento espacial y el pensamiento matemático.

Pocos consideran que la Matemática es una forma de pensar, de resolver problemas, sin embargo, “la aparición de la tecnología contemporánea ratifica cada vez más que la actividad distintiva del hombre es la resolución de problemas y que la Matemática como actividad típicamente humana es esencialmente una actividad de pensamiento y no una rutina o mecanismo que las máquinas pueden realizar”. (39:1), criterio que apoya el autor de esta tesis.



La Matemática tiene un estilo propio de razonamiento. “La brevedad en la expresión, el proceso de reflexión estructurado con exactitud, la ausencia de saltos lógicos y la exactitud en la simbología son características de este estilo de pensar. En la Matemática se aspira a la concordancia óptima con un esquema lógico-formal. El estilo matemático de pensar posibilita en grado sumo, a causa de su concordancia, controlar la exactitud en el proceso del pensamiento. (146:12)

Un/una estudiante alcanza un pensamiento matemático cuando es capaz de:

- “Interpretar datos de la vida diaria y tomar decisiones en función de esa interpretación.
- Usar la Matemática en forma práctica desde simples sumas algorítmicas hasta análisis complejos (incluyendo estadísticos) y usar la modelación.
- Poseer un pensamiento flexible y un repertorio de técnicas para enfrentarse a situaciones y problemas nuevos.
- Poseer un pensamiento crítico y analítico tanto al razonar como al considerar razonamientos de otros.

Lograr esto requiere:

- Buscar soluciones, no memorizar procedimientos.
- Explorar patrones, no memorizar fórmulas.
- Formular conjeturas, no sólo hacer ejercicios”.(39:1)

“El pensamiento matemático refleja el mundo objetivo por medio de los conceptos, relaciones y procedimientos de cuantificación y modelación abstraídos de la realidad.” (81:32). El estilo de pensamiento que se requiere en el Análisis Matemático precisa del manejo por parte de los estudiantes de un amplio inventario de formas gráficas, rico en significados.

Refiriéndose al pensamiento funcional matemático, Bayardo Villegas plantea que “...es una “forma de pensar”, que luego de permitirle a un observador construir, si es posible, una función  $f: X \longrightarrow Y$  acerca de un fenómeno, ... podría generar(le) preguntas, ... Preguntas sobre  $X$  y/o  $Y$  y/o  $f$ , por ejemplo ¿qué otros elementos, además de los iniciales en la construcción de  $f$ , pueden incluirse en  $X$  y cuáles son sus imágenes?, ¿cómo opera  $f$  para transformar  $x$  de  $X$  en  $y$  de  $Y$ ?, etc., preguntas que luego del acercamiento inicial, mediante

estudio, consultas y bibliografía, irán adentrando al observador en el tema, en las “entrañas” de la caja negra, lo cual retroalimentará la concepción de la función; además podría llevarle a formular(se) hipótesis de respuesta acerca de tales preguntas lo que acotaría el campo de la investigación.” (236:2)

Como tipo especial de pensamiento, el pensamiento funcional matemático se caracteriza por:

- Hace posible el conocimiento de propiedades, nexos y relaciones esenciales de una parte determinada de la realidad objetiva.
- Se expresa como identificación, formulación y solución de problemas (modelación de un proceso de la realidad objetiva).
- Es un proceso dirigido (puede ser regulado por el sujeto cognoscente, consciente o inconscientemente)

Este tipo de pensamiento, como pensamiento del más alto orden “implica un conjunto de actividades mentales elaborativas : con requerimientos de juicios matizados y análisis de situaciones complejas de acuerdo con criterios múltiples” (189:57).

El pensamiento funcional matemático tiende a ser complejo, requiere esfuerzos y depende de la autorregulación. La tarea del que piensa es imponer significado y estructura en las situaciones problemáticas a que se enfrenta, en el desorden aparente. Se da en este tipo de pensamiento una fusión entre el pensamiento reflexivo y el pensamiento creativo.

Es propósito de esta tesis brindar una contribución al desarrollo del pensamiento funcional matemático en los estudiantes, como una forma específica del pensamiento matemático. “Para lograr esto debemos partir de considerar relaciones o dependencias entre conjuntos, magnitudes, variables, etc., tratando de delimitar como unas determinan las otras. En general el pensamiento funcional se desarrolla descubriendo o determinando cantidades variables, y las relaciones que determinan unas cantidades en dependencia de las otras, es decir, descubriendo relaciones entre objetos matemáticos u objetos de la vida cotidiana, donde uno depende del otro,...” (8:171)

Para el autor de esta tesis un estudiante alcanza un pensamiento funcional matemático cuando es capaz de:

- Identificar las variables que están presentes en un proceso o fenómeno, en el contexto de la clase o en la vida cotidiana.
- Formular conjeturas acerca de la presencia de relaciones de dependencia funcional en el contexto de la clase o en la vida cotidiana.
- Reconocer relaciones de dependencia entre las variables, determinando la presencia de variables dependientes, intermedias e independientes. Estas relaciones las puede representar por medio de un árbol de dependencia funcional, tabla o diagramas.
- Modelar el proceso o fenómeno a través de ecuaciones de funciones conocidas o, en su defecto, utilizando ecuaciones en las que se pueda identificar la dependencia existente (ecuaciones funcionales en forma general).
- Graficar funciones matemáticas, partiendo del dominio de un amplio repertorio de formas visuales y procedimientos para el análisis de curvas.
- Explorar patrones que modelen procesos o fenómenos de la vida real que tengan un comportamiento similar.

Estos indicadores fueron sometidos a criterio de expertos (ver anexo # 10)

Para poder desarrollar el pensamiento funcional matemático es necesario que tenga lugar un proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones matemáticas que lo propicie. Un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador conduce a la formación de una personalidad integral y autodeterminada del educando, por lo que la concepción y realización de un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de las funciones matemáticas debe propiciar, según el criterio de este autor, el desarrollo del pensamiento, en particular del pensamiento funcional matemático. Por esta razón se resumen en el cuarto epígrafe aspectos teóricos esenciales relacionados con este proceso, los cuales son asumidos por el autor de esta tesis para la formulación de la propuesta metodológica.

Se presentan a continuación aspectos esenciales relacionados con la línea directriz “Correspondencia, transformación, función” y valoraciones sobre la impartición de estos contenidos en el Instituto Superior Pedagógico.

### **1.3- Panorámica de la línea directriz “Correspondencia, transformación, función”.**

La línea directriz “Correspondencia, transformación, función” se desarrolla durante todo el período escolar.

El concepto de función se forma en un período de tiempo largo, a través de unidades temáticas que no se refieren específicamente a funciones. Este trabajo de preparación (etapa propedéutica) comienza con la comprensión por parte de los alumnos de las ideas del concepto de correspondencia. El niño desde los primeros años se vincula con situaciones del mundo que lo rodea que representan correspondencias. En el nivel primario se enfrenta a nuevas correspondencias al estudiar los números naturales, el sucesor y el antecesor de un número natural, las operaciones con números naturales. Se contribuye también a la preparación del concepto de función a través de diferentes contenidos geométricos, haciendo corresponder a figuras geométricas y cuerpos su área o volumen, respectivamente.

Con el estudio de las transformaciones geométricas se logra una profundización en el concepto de correspondencia. Es muy importante en este nivel de enseñanza la familiarización que se produce con los conceptos de variables y ecuaciones, ya que al estudiar las funciones en la enseñanza media, los alumnos reconocerán que una forma de representación de las mismas es mediante ecuaciones que contienen variables.

Otros aspectos esenciales en la preparación del concepto son:

- el trabajo con tablas de valores
- el trabajo con las ecuaciones del tipo  $y=ax$  y  $y=ax+c$  ( $a,c \in \mathbb{N}$ )
- la representación de puntos en la recta numérica y en el plano mediante un sistema de coordenadas.

En la Secundaria Básica se produce una sistematización y profundización de las ideas planteadas anteriormente. La etapa propedéutica se completa con el estudio de los números racionales al hacerle corresponder a cada número racional un único punto en la recta numérica, un único opuesto, un único

recíproco si es diferente de cero y con el trabajo con fórmulas que estudian en Física.

Hasta el curso 98-99 se estudiaba en 8vo grado la definición de función como correspondencia entre dos conjuntos (Una función es una correspondencia que a cada elemento de un conjunto A asocia un único elemento de un conjunto B), así como las funciones lineales, sus gráficas y propiedades. En 9no grado se abordaban las funciones cuadráticas y la función de proporcionalidad inversa, sus gráficas y propiedades.

En el nivel preuniversitario se continuaba con el estudio de las diferentes clases de funciones. Se profundizaba el concepto de función al definirlo como conjunto de pares ordenados (Una función  $f$  es un conjunto de pares ordenados  $(x,y)$  siendo  $x$  un elemento de un conjunto  $X$ ,  $y$  un elemento de un conjunto  $Y$ , y de modo que no hay dos pares con el mismo primer elemento). Se estudiaban las funciones potenciales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y las numéricas con sus gráficas y propiedades.

A partir del curso 99-2000 se realizaron transformaciones que provocaron un desplazamiento en algunos contenidos y cambios significativos en el tratamiento metodológico.

El estudio de las funciones matemáticas en la escuela cubana continúa en la educación superior con el tratamiento de la diferenciación e integración de funciones y otros temas en los cuales encuentran aplicación. Su finalidad es la de llegar a desarrollar el pensamiento funcional matemático de los estudiantes.

En los Institutos Superiores pedagógicos se retoma el estudio de las funciones con la finalidad, por una parte, de “aprender a enseñarlas” a los alumnos de la enseñanza media, tarea de la que se ocupa la Metodología de la Enseñanza de la Matemática, y por otra para profundizar en su estudio y facilitar el desarrollo de otras temáticas, tarea que le ha sido asignada indistintamente a las disciplinas de Análisis y de Álgebra.

Su enseñanza ha pasado por un largo período de desarrollo en el que se distinguen diversas posiciones, por ejemplo:

- las posiciones más tradicionalistas que se caracterizan por el protagonismo casi absoluto del profesor en el desarrollo del proceso de

enseñanza-aprendizaje y que relega al estudiante al simple papel de receptor de la información.

- la utilización de los elementos fundamentales de la Metodología de la Enseñanza de la Matemática, de probada efectividad en la enseñanza media, sin tener en cuenta las diferencias en el desarrollo del pensamiento del estudiante de la Educación Superior respecto al del estudiante de la Enseñanza General Media.
- la realización de diferentes intentos de utilizar algunos recursos informáticos, con la oposición de muchos profesores por el temor del no desarrollo de habilidades en el cálculo y en la graficación.
- El desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje mediante el empleo de nodos cognitivos como una de las tendencias actuales de la Educación Superior, con resultados loables en un período más o menos largo.

Sin embargo los resultados obtenidos no son aún los deseados.

Si se tiene en cuenta que los estudiantes de la carrera de Matemática-Computación y los futuros profesores integrales para la Secundaria Básica tienen la responsabilidad de dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje a ese nivel y consecuentemente contribuir al desarrollo del pensamiento funcional matemático de sus alumnos, puede resultar favorable extrapolar, teniendo en cuenta las diferencias de los estudiantes con los de los niveles precedentes, algunas de las formas de trabajo básicas de la Metodología de la Enseñanza de la Matemática a la Educación Superior, como una contribución a su formación profesional. Por esta razón se asumen en esta tesis las posiciones básicas respecto a la realización de las funciones didácticas (creación de una motivación, planteamiento y orientación hacia el objetivo, aseguramiento del nivel de partida, elaboración, transmisión y asimilación de la materia nueva, fijación de la materia elaborada, aplicación de lo aprendido y control), la concepción teórica del aprendizaje de Galperin sobre la formación de la acción mental por etapas (fases de orientación, formación de la acción y del control y de aplicación) y el tratamiento de las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática predominantes en el tema (formación de conceptos, búsqueda y

demostración de teoremas matemáticos, tratamiento de ejercicios de aplicación y de problemas y la elaboración de procedimientos matemáticos).

Se reconoce en esta tesis el papel importante que juega la heurística para el desarrollo del pensamiento funcional, al propiciar que los estudiantes sean activos en la elaboración y resolución de problemas, que tengan más espacio para el pensamiento independiente y puedan ser productivos desde el punto de vista mental.

#### **1.4- El proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador**

“Las reformas educativas, iniciadas en la última década, han insistido en considerar a los alumnos como sujetos activos en la construcción de conocimientos, en la necesidad de promover aprendizajes en sentido amplio y en asignar un nuevo rol al docente como mediador y facilitador del aprendizaje.” (227:13). En este sentido se llevan a cabo diferentes experiencias en Iberoamérica. En Cuba una de las tendencias ha sido la de propiciar lo que se ha dado en llamar “Proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador”, del cual es partidario el autor de esta tesis.

Antes de llegar a lo que se entiende por proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador es necesario precisar algunos conceptos como educación desarrolladora, enseñanza desarrolladora y aprendizaje desarrollador. Un grupo de especialistas del Centro de Estudios Educativos del I.S.P. “E.J.Varona”, partiendo de los referentes teóricos Vygotskianos han planteado que:

“educación desarrolladora es la que conduce al desarrollo, va delante del mismo, guiando, orientando, estimulando. Es también aquella que tiene en cuenta el desarrollo actual para ampliar continuamente los límites de la zona de desarrollo próximo o potencial, y por lo tanto, los progresivos niveles de desarrollo del sujeto”. (44:29).

Por otra parte asumen como enseñanza desarrolladora: “... el proceso sistémico de transmisión de la cultura en la institución escolar en función del encargo social, que se organiza a partir de los niveles de desarrollo actual y potencial de los y las estudiantes, y conduce el tránsito continuo hacia niveles

superiores de desarrollo, con la finalidad de formar una personalidad integral y autodeterminada, capaz de transformarse y de transformar su realidad en un contexto histórico concreto.” (44:63).

Así el aprendizaje desarrollador lo definen como:

“aquel que garantiza en el individuo la apropiación activa y creadora de la cultura, propiciando el desarrollo de su auto-perfeccionamiento constante, de su autonomía y autodeterminación, en íntima conexión con los necesarios procesos de socialización, compromiso y responsabilidad social.” (44:45).

Precisadas las definiciones anteriores se asume como Proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador:

“aquel que constituye un sistema donde tanto la Enseñanza como el Aprendizaje, como subsistemas, se basan en una Educación desarrolladora, lo que implica una comunicación y actividad intencionales, cuyo accionar didáctico genera estrategias de aprendizajes para el desarrollo de una personalidad integral y autodeterminada del educando, en los marcos de la escuela como institución social transmisora de la cultura” (108:347).

Sobre las formas de organización para el Proceso de Enseñanza Aprendizaje desarrollador recomiendan que éstas deben ser:

“flexibles, dinámicas, significativas, atractivas, que garanticen la implicación del estudiante y que fomenten el trabajo independiente en estrecha relación con el grupal, entre otros aspectos significativos.” (108:371).

“Por otra parte, desde el punto de vista didáctico, la consideración del grupo como un espacio de aprendizaje, supone una visión diferente y cualitativamente superior del diseño de las tareas de aprendizaje, pues no se trata ya de la limitada relación dicotómica entre la atención a *todos* los alumnos del grupo y la atención diferenciada a *cada* miembro del mismo. Se trata de utilizar este espacio grupal como un componente del proceso que debe ser tenido en cuenta en su diseño y ejecución, como una *herramienta* para la atención a la diversidad. Este principio pedagógico se constituye en eje estructurador de la organización del proceso.” (44:70).

En resumen, “para la creación de situaciones de enseñanza aprendizaje desarrolladoras se deben tener en cuenta los siguientes principios:



1. La promoción de una construcción activa y personal del conocimiento por parte de los/las estudiantes.
2. La unidad de afecto y cognición a través de un aprendizaje racional y afectivo-vivencial.
3. Las oportunidades para trabajar en grupo y realizar un aprendizaje cooperativo.
4. El respeto a la individualidad, a los intereses, particularidades y necesidades de los/las estudiantes desde la flexibilidad y diversidad en objetivos específicos, contenidos, métodos, estrategias y situaciones educativas-
5. La posibilidad de aprender a través de actividades desafiantes que despierten las motivaciones intrínsecas.
6. La participación y solución en problemas reales, contextualizados, que permitan explorar, descubrir y hacer por transformar la realidad.
7. La transformación del (de la) estudiante de receptor en investigador y productor de la información
8. La promoción del autoconocimiento, de la autovaloración y de la reflexión acerca del proceso de aprendizaje.
9. La valoración de la autodirectividad y la autoeducación como meta.
10. El centro en los cuatro planes básicos de la educación: aprender a conocer, a hacer, a convivir, y a ser". (43:125)

Constituyen estos cuatro planes básicos los pilares del aprendizaje para el siglo XXI, definidos por la UNESCO:

**“Aprender a ser** para conocerse y valorarse a sí mismo y construir la propia identidad para actuar con creciente capacidad de autonomía, de juicio y de responsabilidad personal en las distintas situaciones de la vida. **Aprender a hacer** desarrollando competencias que capaciten a las personas para enfrentar un gran número de situaciones, trabajar en equipo, y desenvolverse en diferentes contextos sociales y laborales. **Aprender a conocer** para adquirir una cultura general y conocimientos específicos que estimulen la curiosidad para seguir aprendiendo y desarrollarse en la sociedad del conocimiento. **Aprender a vivir juntos** desarrollando la comprensión y valoración del otro, la

percepción de las formas de interdependencia, respetando los valores del pluralismo, la comprensión mutua y la paz. A ellos hay que añadir “**Aprender a emprender**”, para el desarrollo de una actitud proactiva e innovadora, haciendo propuestas y tomando iniciativas” (227:16)

Respecto a procedimientos o técnicas que complementan a los métodos propiciadores del proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador se recomienda utilizar estrategias para el accionar didáctico de sus protagonistas como son los mapas conceptuales.

### 1.5- Los mapas conceptuales:

Los mapas conceptuales son un desarrollo de la teoría postpiagetiana en el ámbito de la teoría de asimilación basado en tres aspectos fundamentales :

- 1- “El aprendizaje significativo lleva a una diferenciación progresiva de la estructura cognoscitiva.
- 2- Es posible una reconciliación integradora entre nuevos y viejos conocimientos que corrija preconcepciones.
- 3- El conocimiento adquirido mecánicamente no se asimila en estructuras cognoscitivas.” (152:44)

Un mapa conceptual “constituye una representación gráfica de la organización de la estructura cognoscitiva del estudiante, le permite la negociación de significados, es un instrumento que le sirve para mejorar el recuerdo, realizar resúmenes y facilitar la autoevaluación, elevar la autoestima, entre otras ventajas. Puede servir como estrategia de enseñanza, de evaluación, de aprendizaje significativo, como recurso didáctico”. (108:19)

Un mapa conceptual es un recurso esquemático para representar un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones. Según Novak, su creador:

- "Un buen mapa conceptual es conciso y muestra las relaciones entre las ideas principales de un modo simple y vistoso, aprovechando la notable capacidad humana para la representación visual" (108:19)

- "Los mapas conceptuales constituyen un método para mostrar, tanto al profesor como al alumno, que ha tenido lugar una auténtica reorganización cognitiva" (108:19)

Los mapas conceptuales tienen por objeto representar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones.

Una característica muy importante de los mapas es que dirigen la atención de estudiantes y profesores sobre las ideas más importantes en las que deben centrar su atención en la tarea de aprendizaje. Por otra parte sirven de caminos o vías para conectar los significados de los conceptos que componen las proposiciones y constituyen resúmenes esquemáticos de gran utilidad para el estudio.

La elaboración de mapas conceptuales es una técnica para poner de manifiesto conceptos y proposiciones. Para confeccionar un mapa conceptual deben situarse en la parte superior los conceptos más generales e inclusivos y en la parte inferior los más específicos y menos inclusivos (subordinados).

Las relaciones entre conceptos pueden cambiar en distintos momentos del aprendizaje, es decir, en un mapa conceptual un concepto puede "elevarse a la posición superior, y seguir manteniendo todavía una relación proposicional significativa con otros conceptos del mapa". (108:18)).

Jiménez, en su tesis doctoral, señala las funciones que pueden desarrollar los mapas conceptuales:

- "Función de sistematización, al permitir expresar los contenidos conceptuales en diferenciación progresiva entre los conceptos a partir de la asimilación de nuevos conceptos y los conocimientos precedentes, así como integrarlos a partir de la reorganización jerárquica.
- Función evaluativa o diagnóstica ya que permite conocer las relaciones que los estudiantes establecen entre los conceptos.
- Función motivadora, al constituir un reto para los estudiantes el poder expresar en una representación gráfica la relación que existe entre los conceptos explicados y que ésta sea común para todos." (128:58)

La elaboración de mapas conceptuales puede ser una actividad creativa y contribuye a fomentar la creatividad, ya que para quienes los elaboran es muy

estimulante descubrir nuevas relaciones, nuevos significados que no poseían de una manera consciente antes de elaborar el mapa.

“Nos resulta muy difícil pensar en las ideas que son nuevas, poderosas y profundas: necesitamos tiempo y alguna actividad mediadora que nos ayude. El pensamiento reflexivo es un quehacer controlado que implica llevar y traer conceptos, uniéndolos y volviéndolos a separar. Los estudiantes necesitan practicar el pensamiento reflexivo igual que un equipo tiene que dedicar tiempo para entrenarse en un deporte. Se puede considerar que construir y reconstruir mapas conceptuales y compartirlos con los demás constituye un esfuerzo solidario en el deporte del pensar. Los programas de ordenador que estamos desarrollando en la actualidad pueden facilitar esta costumbre de pensar utilizando mapas conceptuales” (152:35).

El sentido fundamental de los mapas cognoscitivos es propiciar el aprendizaje significativo de los estudiantes y conducir a los profesores a un análisis tanto de los hechos, principios y teoría de una disciplina como a una mirada reflexiva y ética de su práctica pedagógica. El objetivo es que los estudiantes y los profesores visualicen la estructura de los conceptos y las relaciones entre ellos, que den sentido a los enunciados que memorizan o a los problemas que resuelven de manera mecánica con un algoritmo.

“No es necesario hacer un curso específico para que el alumno “aprenda a aprender”. Lo que es preciso es que el maestro incorpore tácticas de aprendizaje (conocimiento) y de evaluación (metaconocimiento) que obliguen a los estudiantes a pensar: es decir, a asumir categorías significativas para entender el mundo natural y social.”(152:45)

En lo que respecta a la Informática, los mapas conceptuales juegan un papel fundamental en la elaboración de hipertextos. La elaboración del mapa conceptual consiste en graficar los conceptos y relaciones identificados previamente, para lo cual se utilizan nodos y arcos: los nodos representan los conceptos y los arcos las relaciones. El mapa conceptual se constituye en la estructura básica del hipertexto y permite determinar las posibles rutas de navegación a través de la información. También es la base para la creación de

las diferentes librerías (de texto, de audio, de gráficas, de animación y de video) y el diseño del *storyboard*.

La utilización de la computadora, como fuente de abundante información que debe ser seleccionada, procesada, asimilada y utilizada en la resolución de los problemas de la Ciencia y la vida cotidiana, debe ser cuidadosamente estudiada en el empeño de lograr un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de las funciones matemáticas. Por esta razón se dedica el siguiente epígrafe a la mediación pedagógica, particularizando en la mediación del proceso de enseñanza-aprendizaje con las nuevas tecnologías y el posterior centra su foco de atención en la utilización de la Informática en la enseñanza, particularmente en las clases de Matemática.

### **1.6- La mediación pedagógica de las tecnologías:**

Sin dudas todo está mediado en el ser humano y a su vez el ser humano es un irremediable mediador. En particular, en el proceso de enseñanza-aprendizaje se reconocen seis instancias de mediación (la institución, el educador, el grupo, el contexto, los medios y materiales y el propio estudiante), cada una con sus diferenciaciones producto de los condicionamientos culturales y sociales, o bien de la inflexión que cada conjunto de seres le da a una instancia. Pero, ¿cuándo se dice que dicha mediación es pedagógica?

Se denomina mediación pedagógica a “una mediación capaz de promover y acompañar el aprendizaje de nuestros interlocutores, es decir, promover en los educandos la tarea de construirse y de apropiarse del mundo y de sí mismos”. (187:15).

Para el autor de esta tesis se asume “Acompañar el aprendizaje” como conducir el tránsito continuo hacia niveles superiores de desarrollo, con la finalidad de formar una personalidad integral y autodeterminada.

Apropiarse del mundo significa hacerlo de uno, relacionarse con él de manera fluida, poder moverse en distintas situaciones con la capacidad como para enfrentar y resolver problemas, para buscar causas y prever consecuencias de las acciones propias y ajenas.

En este epígrafe se trata únicamente de analizar los medios para la educación (impresos, audiovisuales, electrónicos) desde la mediación pedagógica, es decir, desde la tarea de todo educador y de todo el sistema en general (la institución misma, los textos, los materiales, las tecnologías) de promover y acompañar el aprendizaje de sus estudiantes. Se trata de mediar pedagógicamente las tecnologías aplicadas a la educación, desde el libro hasta el hipertexto o las redes.

Materiales bien mediados, con ejemplos, anécdotas, experiencias, con puentes hacia los conocimientos del otro, son básicos para la promoción y el acompañamiento del aprendizaje. Si a ello añadimos ahora los horizontes que se abren con las nuevas tecnologías, la necesidad de mediar se amplía, ya que la complejidad de los sistemas, el acceso a enormes corrientes de datos, requieren de una orientación y una preparación para favorecer el aprendizaje. (187:39).

Resulta doloroso que, contando con las computadoras en los centros educacionales en todos los niveles del país, sean empleadas fundamentalmente para buscar información o que su uso se limite al procesador de palabras, como una suerte de máquina de escribir más ágil. El ideal de utilizar la computadora como recurso de aprendizaje (para hacer proyecciones, resolver problemas, plantear simulaciones y tantas otras posibilidades) no es todavía una realidad.

En el campo de la educación la mediación pedagógica de las tecnologías significa la creación de espacios para la búsqueda, el procesamiento y la aplicación de información, propiciar el encuentro con otros individuos así como el fomento la apropiación de las posibilidades estéticas y lúdicas que van ligadas a una creación.

Una tecnología adquiere valor pedagógico cuando se le utiliza sobre la base del aprovechamiento de sus recursos de comunicación para promover y acompañar el aprendizaje. En otras palabras, cuando se garantiza el uso de sus posibilidades comunicacionales con un propósito explícito de mediar los diferentes materiales, de emplearlos desde una situación educativa.

Para poder apoyar con tecnologías la promoción y el acompañamiento del aprendizaje, en particular con el uso de hipertexto, multimedios y redes, el/la profesor/a debe tener un profundo conocimiento sobre sus lenguajes y posibilidades comunicacionales.

“La máquina es una verdadera extensión de nuestro cerebro, con su capacidad de búsqueda y de relación, y es necesario, para sacarle provecho desde el aprendizaje, ponerla a funcionar como si fuera nuestro cerebro.” (187:57).

Lo que interesa es aprovechar todas las posibilidades de la máquina como recurso y recuperación de memoria, para prácticas de simulación, para proyecciones, para articulación de datos dispersos, para desarrollos de programación, en el empleo de asistentes matemáticos, entre tantas otras posibilidades.

Una característica que distingue a un sistema interactivo es que no se puede mantener el sistema lineal de la educación tradicional, ya que es posible navegar en distintas direcciones. Cuanto más involucrado se está en el proceso de manipular la información, más se estimula la avidez por aprender; es aquí donde se pone a prueba el conocimiento y la capacitación del profesor.

“El papel de la planificación, la búsqueda ordenada de información, la priorización de ciertos datos por encima de otros, el saber qué hacer con la información, requieren de un esfuerzo de mediación por parte de la institución y de los educadores preocupados por la promoción y el acompañamiento del aprendizaje. Si antes enseñábamos a trabajar en la biblioteca, ahora nos toca hacerlo en esta inmensa explosión de fuentes a las que asistimos en la actualidad. Y nos toca dedicarnos a capacitar tanto a los estudiantes como a los docentes.” (187:60).

Ninguna tecnología despierta de manera mágica las ansias de aprender (sin desconocer que la computadora es un recurso muy motivador), ni tampoco puede dar pie a desconocer la labor del educador. El educador no desaparece, se traslada en este caso de escenario.

Por ello la mediación pedagógica de las nuevas tecnologías alcanza a:

- la tarea directa del educador

- a los materiales que, mediados resultan útiles para promover y acompañar el aprendizaje
- a las prácticas de los/las estudiantes, que consisten en apropiarse de lo que les llega mediado y a la vez en hacer sus propias mediaciones, a través de la expresión de sus progresos por diferentes tecnologías de comunicación.

### **1.7- La Informática y la enseñanza.**

Muchas han sido las discusiones desde hace siglos sobre la “bondad” o la “maldad” de los desarrollos tecnológicos y sobre la medida en que éstos favorecen el desarrollo armónico del ser humano y de la sociedad.

La sociedad ha experimentado cambios significativos que se han reflejado en el sistema educativo. “Entre los principales aportes del siglo XX a la teoría y la práctica pedagógica se encuentra la tecnología educativa. Ella comprende el empleo de modernos medios de conservación y tratamiento de la información – computadoras, televisión, cine, proyectores, teléfono, etc.- en el proceso de enseñanza-aprendizaje, así como la aplicación de concepciones y métodos de la cibernética, la teoría de los sistemas y la de la información.” (33:49)

La tecnología informática está jugando un papel central en el cambio educativo, dirigiendo la explosión informática y haciendo posible que se piense en nuevas maneras de responder a nuevas demandas. “La noción de aprendizaje está cambiando. Estamos comenzando a tener diferentes ideas acerca de qué deben aprender los estudiantes.” (225:5)

Los estudiantes de hoy deben ser capaces de localizar, sintetizar y analizar información a una escala sin precedentes, deben informarse para tomar decisiones acerca de cuestiones científicas, económicas, sociales y políticas que son cada vez más complejas, y adaptarse creativamente a un mundo cambiante, lo que constituye el más grande reto que tienen en sus manos los profesores.

“Dirigidas por la explosión de la información o la explosión del conocimiento, nuestras expectativas de qué debe un estudiante aprender están cambiando radicalmente; la visión de la institución educativa como lugar donde se enseña



un cuerpo de conocimientos o se prepara al estudiante a una carrera que debe durar toda la vida está siendo reevaluada. Hoy en día reconocemos que los graduados deben adquirir aptitudes como pensamiento crítico, razonamiento cuantitativo, comunicación efectiva, la habilidad para encontrar información y habilidad para trabajo en grupo". (225:7)

El desarrollo de las nuevas tecnologías de la información, está incidiendo cada vez más en el sistema educativo, tanto que, "... tendremos que reconsiderar conceptos como "conocimientos", "aprendizaje", "destrezas", etc. Especialmente en Matemáticas tendremos que preguntarnos cuál es el verdadero conocimiento matemático y cuál no lo es aunque lo parezca." (35:17).

El incremento constante de información que se recibe de las nuevas tecnologías tiene que producir un cambio en el mundo educativo en cuanto a que un objetivo básico deberá ser la obtención de habilidades y criterios para buscar y seleccionar la información que necesita el estudiante y habilidades que favorezcan el autoaprendizaje. Esto supone un cambio en el rol del profesor, debe convertirse en un profesional que brinda información, que dé sentido a la "cultura mosaico" (no sistemática, no organizada) que obtienen los estudiantes, integrándola a un proyecto de desarrollo de la persona y dar procedimientos para contrastar informaciones, para saber destacar las ideas fundamentales dentro de un mensaje. Este debe apropiarse de la tecnología informática y usarla de la mejor manera posible para crear ambientes que permitan lograr el tan anhelado cambio educativo.

La integración entre las nuevas tecnologías y la educación no se reduce a la simple introducción de los medios en la enseñanza, sino que requiere un proceso de adopción de la Tecnología Educativa. En este proceso, la adaptación de los medios al modelo didáctico centrado en el docente, puede constituir, solamente, un primer paso. Los medios deben dejar de ser intermediarios curriculares y sistemas de control de lo que se enseña en el aula y convertirse en verdaderos auxiliares del docente.

Los medios tecnológicos no son sustitutos del profesor. “Es este el que tendrá que hacer un uso adecuado de los mismos para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje en su entorno educativo.” (193:117).

La integración puede provocar cambios radicales en las situaciones de aprendizaje que se organizan. “Ello supone nuevas estrategias didácticas que extraigan el máximo rendimiento de estos nuevos medios, ya que lo mismo que sucede con los otros elementos curriculares, medios y estrategias didácticas se influyen y condicionan” (58:81).

Una integración que vaya más allá del uso tradicional que se ha hecho de los medios supone, también, cambios en las concepciones didácticas. Supone transformaciones, innovaciones. Contribuye a ellas, al mismo tiempo que las exige. Contribuye desde el momento que su presencia representa una modernización del sistema educativo al aproximar los medios de comunicación actualmente en boga en la sociedad a la escuela. Pero, por otra parte, requieren del sistema educativo una serie de transformaciones relativas a la adecuación de objetivos y contenidos al momento actual que vive la sociedad, a una renovación en las concepciones didácticas.

#### **1.7.1- El ordenador en la enseñanza**

Se considera como **computadora** u **ordenador**: una máquina controlada por programas almacenados en memoria y que se utiliza para el manejo de información.

A comienzos de los 80 aparece el microcomputador, el cual cambia radicalmente el problema del uso de los computadores en educación, no solo por la reducción en precio de los equipos de cómputo, sino porque además eran fácilmente transportables de un sitio a otro.

Este advenimiento del microcomputador trajo consigo la creación de programas de uso personal y llevó a la creación por parte de las compañías de software, de los procesadores de palabra, las hojas electrónicas, los sistemas de gestión de bases de datos, que permitieron la creación del concepto de oficina electrónica. Hoy en día estos son los programas de computador más usados incluso en el medio educativo.

Al referirse a la utilización de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje, numerosos investigadores plantean tres usos fundamentales de la misma: Como objeto de estudio, como herramienta de trabajo, y como medio de enseñanza. Otros distinguen su uso como simulador de fenómenos y procesos.

“... el carácter interactivo de la computadora hace mucho mayor y complejo el reto que tiene el maestro en su preparación para la utilización de este medio, no ya como objeto de estudio, sino como medio de enseñanza y herramienta en la que puede apoyarse el alumno para aprender más y mejor a partir de que puede adaptar la intensidad de su uso a sus posibilidades en el aprendizaje.” (95:6)

“Las computadoras, con sus posibilidades gráficas, que cada día ofrecen recursos más sofisticados y poderosos en estos tiempos de los discos láser y la multimedia, pueden emular exitosamente con cualquiera de los medios de enseñanza tradicionales y pueden superarlos por las posibilidades de interacción y toma de decisiones que ninguno de los otros medios permite” (77:18)

El papel de la computadora como instrumento de ayuda para la adquisición de conocimientos en el aula, implica la utilización de un software previamente elaborado. El éxito dependerá, entre otras cosas, de la calidad del software.

El software educativo puede cambiar la manera como se aprende. “La tecnología de computadores puede hacer que la atención individualizada sea una realidad, los computadores tienen la habilidad de presentar a los estudiantes tareas que ellos están interesados en hacer. Puede ofrecerle al estudiante la posibilidad de ser inquisidor, la posibilidad de exploración y la posibilidad de cometer errores y reponerse de estos, sin sentirse mal por ello”. (216:92).

Entre las ventajas de la enseñanza asistida por computadoras se reconocen por los educadores:

- Propicia cierto grado de interacción entre el alumno y el programa.

- Es posible programar la computadora para tomar decisiones respecto a la estrategia de aprendizaje más adecuada a las necesidades e intereses de cada alumno.
- Libera al docente de las tareas más repetitivas.
- Disponibilidad y accesibilidad.

Los programas existentes, según el propósito para los que fueron diseñados se clasifican en:

- De propósito general: Procesadores de textos, gestores de bases de datos, hojas de cálculo y de diseño de gráficos.
- De carácter específico: programas para la enseñanza asistida por ordenadores, entre otros.

Martínez y Sauleda (1995) proponen la división de los programas en el campo educativo en dos grandes categorías:

- “El ordenador como fin del aprendizaje curricular, con una fase de iniciación que corresponde a lo que se llama alfabetización informática y que, en general se refiere al aprendizaje de los conocimientos sobre hardware y software, incluyendo los lenguajes de programación.
- El ordenador como medio de aprendizaje. Corresponde a las aplicaciones dirigidas a la adquisición de conocimientos conceptuales, procedimentales o actitudinales del currículo. Se distinguen las siguientes categorías:
  - ❖ Los programas tutoriales
  - ❖ Programas de ejercitación y práctica
  - ❖ Simuladores
  - ❖ Con función de entretenimiento
  - ❖ De usos especiales” (193:194)

Al seleccionar los programas para la educación se debe velar, al menos, por:

- si se va a trabajar con grupos pequeños o de manera individual
- el nivel que tienen los/las estudiantes (necesidad de un diagnóstico profundo)
- la planificación de los momentos en que se va a utilizar dentro de la asignatura

- la correspondencia de los contenidos que transmiten y los correspondientes a la asignatura
- las posibilidades de exploración de manera individual
- las posibilidades de autoevaluación del aprendizaje.

Salgado (2002) destaca que el uso de la computadora como medio de enseñanza puede ser :

- “una manera de “despertar o activar” ciertas operaciones mentales relevantes para el aprendizaje, como las estrategias cognitivas y afectivas (particularmente el interés) y la metacognición.
- Una manera de “enseñar” ciertos sistemas de códigos, símbolos o procesos para que los niños puedan aprovechar mejor los mensajes de los dispositivos.
- Una manera de acceder a “sistemas de símbolos” que pueden ser internalizados, organizados, esquematizados y utilizados como herramientas mentales, es decir, como estrategias cognitivas.” (200:18)

Por su parte Vázquez, (1998), refiriéndose a los aspectos esenciales a tener en cuenta en cualquier propuesta metodológica para la introducción de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje, destaca:

- “Las posibilidades que brinda en la realización de la actividad docente de los alumnos, para participar activamente en la adquisición de los conocimientos.
- El aumento de la motivación de los alumnos por el estudio de la asignatura.
- La contribución al desarrollo del pensamiento y al trabajo independiente de los estudiantes.” (231:13)

### **1.7.2- Las aplicaciones multimedia**

Se considera Multimedia o sistema multimedia: “Aquel capaz de representar información textual, sonora o audiovisual, de modo integrado y coordinado: gráficos, fotos, secuencias animadas de vídeo, gráficos animados, sonidos y voces, texto,...” (28:33)

La importancia de los sistemas multimedia radica en que :

- “Presentan las ventajas comunes a todas las tecnologías, permitiendo además una mayor interacción.
- Ofrecen la posibilidad de controlar el flujo de la información
- Gracias a la información almacenada en un disco óptico, ofrecen gran rapidez de acceso y durabilidad
- Unen todas las posibilidades de la Informática y de los medios audiovisuales.
- La información audiovisual que contiene un disco óptico puede ser utilizada para varias finalidades.
- Un programa multimedia bien diseñado no corre el peligro de obsolescencia, puesto que pueden actualizarse constantemente los contenidos con pequeños cambios en el software.” (193:201)

A partir de la unión de educadores e informáticos que ven futuro al computador en los ambientes educativos, surgen diferentes teorías acerca de cómo usar el computador como ambiente de enseñanza aprendizaje, cada una de ellas basadas en teorías pedagógicas. Bartolomé (1998), destaca las siguientes concepciones del aprendizaje subyacentes en las aplicaciones multimedia:

- **“Aprendizaje basado en teorías asociacionistas.** Se concibe el aprendizaje a partir de la creación de asociaciones de ideas o conocimientos. Se utilizan aplicaciones como: programas de ejercitación, tutoriales y libros multimedia infantiles.
- **Aprendizaje como construcción del conocimiento.** Estas aplicaciones encuentran su fundamentación en la teoría del aprendizaje constructivista. Como ejemplos se señalan las enciclopedias, hipermedia y el estudio de casos y problemas.
- **Modelos ambivalentes. Simulaciones y videojuegos.** En este caso el aprendizaje está relacionado con las situaciones con que se encuentra en dependencia de las decisiones que él adopta, al desarrollo de destrezas y otras informaciones relacionadas con el juego.
- **Aprendizaje contextual.** A través de videojuegos se genera aprendizaje en la medida que el alumno avanza en el mismo, incorpora un nuevo vocabulario, destrezas y otras informaciones relacionadas con el juego.

- **Aprendizaje en grupo.** Existen aplicaciones que están orientadas al trabajo en grupo, que permiten alcanzar un objetivo en grupo contrastando ideas, distribuyendo tareas entre todos los integrantes del equipo.” (27:209)

Tomando en cuenta que “el aprendizaje no es un acto simple, éste involucra complejas series relacionadas de procesos cognitivos, incluyendo atención, percepción y memoria” (Macromedia, 1995, 3) se requiere de una herramienta que promueva el papel dinámico del/de la estudiante, mediante actividades que conserven la atención y desarrollen habilidades necesarias para lograr conocimiento.

“De acuerdo a un grupo de investigadores, el ser humano tiene la capacidad de retener :

- un 20% de lo que escucha
- un 40% de lo que ve y escucha
- un 75% de lo que ve, escucha y practica.” (50:19),

El ser humano es inquieto y curioso por naturaleza. Por tanto, si se proporciona al/a la estudiante múltiples materiales (ejercicios y contenido), atractivos, preparados con fines instructivos, y se le da orientaciones para que se mueva por un mundo de información que no resulte tedioso de explorar, se puede esperar que esto dé en él por resultado el mantenimiento del dinamismo, consiguiendo un alto nivel de retención de la información, que desemboca en la formación de conocimiento.

### **1.7.3- Las nuevas tecnologías en la enseñanza de la Matemática.**

Son diversos los usos que se le ha dado a la computadora en la enseñanza de la Matemática, Alemán de Sánchez, en “ La enseñanza de la Matemática asistida por computadora” destaca:

- “Computadora como pizarrón electrónico.
- Computadora como tutor.
- Para ejercitación y práctica.
- En la simulación.
- Juegos educativos.

- Lenguajes de programación para el aprendizaje de conceptos.
- Como apoyo a la administración de la docencia.” (7:5)

En el caso de la enseñanza de la Matemática se consideran nuevas tecnologías las calculadoras gráficas o supercalculadoras y los software matemáticos en ordenadores personales.

“Se observan dos vertientes en los programas para las Matemáticas, que son:

1. La elaboración y uso de programas con fines específicos de enseñanza-aprendizaje, que pueden adoptar diferentes formas (tutoriales, entrenadores, juegos o simuladores) en dependencia de los objetivos propuestos.
2. El uso de sistemas de herramientas computacionales que automatizan procesos matemáticos complejos, pero que no sistematizan enfoques didácticos (DERIVE (anexo # 2), *Cabri-Geometry*, Matemática, *Mumath*, etc)” (200:23)

Muchos de estos asistentes matemáticos fueron creados para facilitar la resolución de problemas matemáticos que se presentan en las investigaciones científicas o en trabajos relacionados con la técnica, por lo que es responsabilidad de los profesores buscar las vías más eficientes para trabajar con los mismos.

Sin dudas el empleo de los asistentes en la enseñanza de la Matemática resulta un elemento motivador tanto para profesores como para estudiantes por las bondades que ofrece, permitiendo experimentar variando hipótesis, realizando conjeturas sobre posibles resultados o variando condiciones iniciales. En dependencia de los fines que se persigan pueden favorecer el trabajo en equipo o propiciar un aprendizaje más autónomo del estudiante.

La utilización racional de estos paquetes favorece la reflexión, la mejor comprensión de conceptos, el análisis de los resultados y posibilita desarrollar una matemática más próxima a la vida, a los problemas de la ciencia y la técnica, a los problemas cotidianos a los que se enfrenta el estudiante.

Sin embargo no todo se considera positivo en el empleo de los asistentes en la enseñanza de la Matemática. Muchos profesores rechazan su empleo, en primera instancia por el temor a lo nuevo, por la efectividad que siempre han



encontrado en las metodologías que han empleado tradicionalmente y por los riesgos que se corren si no se emplean con el cuidado necesario, por ejemplo:

- la pérdida de destrezas básicas al no tener necesidad de realizar los cálculos a mano.
- que se centre más la atención en el programa que en la Matemática.

Estos problemas se pueden evitar planificando adecuadamente el empleo del asistente en las clases. El hecho de que la máquina realice los cálculos necesarios no significa que no se enseñe a calcular, para esto se podrá combinar el empleo de la máquina con la realización de cálculos a mano, se deberá seleccionar una estrategia para la resolución de problemas en la que se preste más atención a las vías de resolución y a la ganancia metodológica que se pueda extraer del proceso, favoreciendo el desarrollo del pensamiento.

Por otra parte, la asignación de pequeñas tareas de investigación a equipos y el debate en el grupo de los resultados que ofrece la máquina, comparándolos con los resultados estimados o con posibles resultados obtenidos de las reflexiones realizadas a priori pueden contribuir a la utilización efectiva de los asistentes matemáticos en las clases, aumentando el interés por el estudio de esta ciencia.

Otro de los temores de algunos docentes es el de saber menos que el estudiante de Informática. Debe ser consciente de que posiblemente va a estar en desventaja con respecto al estudiante en cuanto al uso del computador. Esto, en lugar de convertirse en algo intimidante para él, debe ser una ocasión para entablar diálogo con el estudiante y por qué no, aprender de él.

### **Conclusiones del capítulo:**

El estudio realizado sobre el origen y desarrollo de las funciones ha permitido develar cómo se fue formando el concepto de función que se utiliza en la actualidad. Fueron muchos los hombres de ciencia que con intentos, unas veces fallidos y otros de manera exitosa, se fueron aproximando cada vez más a la definición de este concepto que ocupa un lugar privilegiado en el andamiaje teórico de la Matemática, alrededor del cual se entrelazan problemas epistemológicos, cognitivos, didácticos y sociológicos.

El trabajo de preparación de este concepto en la escuela requiere de una gran dedicación en un período largo que comienza desde los primeros años de edad del niño, pasando por toda la enseñanza primaria, hasta llegar a formularlo en la Secundaria Básica, como correspondencia entre conjuntos, en el preuniversitario como conjunto de pares ordenados y concluir su fijación con el estudio de la diferenciación e integración de funciones, ecuaciones diferenciales y otros contenidos en los que éstas encuentran importantes aplicaciones.

Las transformaciones llevadas a cabo en la Secundaria Básica exigen la presentación y tratamiento de este contenido a partir de problemas prácticos de carácter político-ideológico, económico-laboral y científico-ambiental y no sólo desde la propia lógica de la asignatura. Todo este trabajo debe conducir al desarrollo del pensamiento funcional matemático de los estudiantes, por lo que se impone la preparación de los futuros profesores para trabajar en esta dirección.

Una condición esencial para la elaboración de la propuesta metodológica debe ser la implementación de un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador. La utilización de mapas conceptuales resulta muy beneficiosa en el estudio de las funciones, por el predominio de conceptos y la estrecha relación existente entre ellos.

Teniendo en cuenta que la utilización de nuevas tecnologías informáticas favorece la simulación de fenómenos de la realidad, ayudan y motivan a un trabajo más creativo en el aula al utilizarlas para formular conjeturas, buscar soluciones, explorar patrones, y permiten, junto con los medios educativos tradicionales mejorar el aprendizaje, que la incorporación de elementos visuales al enfrentar problemas propicia que se vea a las funciones no sólo como un objeto, sino que además permite transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico y verbal, es posible dar cumplimiento a las nuevas exigencias de los programas y contribuir de una manera más eficiente al desarrollo del pensamiento funcional matemático.

Todas estas consideraciones avalan la elaboración de una propuesta metodológica para el empleo de las tecnologías de la información y las

comunicaciones con el fin de lograr un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de las funciones matemáticas.

## **CAPÍTULO II: UNA APROXIMACIÓN A LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA: UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL TRABAJO CON LAS FUNCIONES LINEALES UTILIZANDO EL DERIVE**

Con el objetivo de precisar formas de trabajo que pudieran ser generalizadas para la elaboración de una propuesta general de empleo de la Informática para el tratamiento metodológico de las funciones matemáticas, se decidió realizar una experiencia de constatación con estudiantes del primer año de la carrera de Matemática-Computación del Instituto Superior Pedagógico “Enrique José Varona”, utilizando el asistente DERIVE en función del desarrollo del pensamiento funcional matemático.

En el primer epígrafe se plantean algunas características de carácter general de la propuesta metodológica, a partir de las posiciones teóricas asumidas y algunas consideraciones organizativas.

En el segundo epígrafe se detalla la propuesta metodológica y en el tercero se recogen los resultados de la experiencia de constatación.

### **2.1- Consideraciones generales sobre la propuesta metodológica para el trabajo con las funciones lineales.**

Con esta propuesta se aprovechan las nuevas tecnologías, apoyadas en un modelo pedagógico que posibilita construir ambientes de aprendizaje que enriquecen el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones lineales.

Se concibe el trabajo de los/las estudiantes en dúos en una misma máquina o que las máquinas se encuentren en red para propiciar la comunicación entre los/las estudiantes, el debate de sus criterios, procurando que se varíen los roles en el equipo, para garantizar que todos puedan desarrollar las habilidades específicas como son el manejo de software, expresión oral, redacción y las relacionadas con el contenido matemático.

Se presta especial atención al trabajo con problemas y de ejercicios en los que los estudiantes tengan que tomar decisiones, diferenciar casos.

El profesor promoverá el intercambio de ideas y actuará como mediador entre el estudiante y la computadora, ofreciendo a éste ambientes de trabajo que estimulen la reflexión y lo vayan convirtiendo poco a poco en el responsable de su propio aprendizaje.

La utilización de un determinado medio para la aprehensión de los significados supone tener en cuenta las características específicas de ese medio. Así, el ordenador propicia un contexto de aprendizaje diferente al de otro medio. Se ha tenido en cuenta el papel que juega el profesor en la utilización de software instructivo, asignando el papel más relevante en el proceso de enseñanza-aprendizaje a la comunicación, en el contexto cultural y en el lugar donde dicho proceso se lleva a cabo.

Se evaluaron varios productos informáticos, en dependencia de los objetivos de cada actividad docente. Sin embargo, teniendo en cuenta las bondades que ofrece el asistente matemático DERIVE para el trabajo con las funciones matemáticas, se decidió realizar la propuesta metodológica para este tipo de funciones tomando como base al mismo, lo que no excluye la posibilidad de utilizar otros productos informáticos como complemento de este trabajo.

La propuesta fue elaborada para trabajar con la versión 4.11 o con la 5.02 del DERIVE en español, no obstante, es posible trabajar con la versión 5.02 en Idioma Inglés lo que favorece el trabajo en función de lograr una cultura general integral. De igual manera es posible trabajar con las últimas versiones de este asistente que han ido surgiendo, pues conservan la esencia de su filosofía de trabajo.

Una característica fundamental de la propuesta es que se concibe el aprendizaje simultáneo del trabajo con el DERIVE con el de las funciones, teniendo en cuenta que las opciones para trabajar con el asistente matemático resultan de fácil manejo.

Se utilizan hojas de trabajo como apoyo al trabajo en la máquina, mapas conceptuales y como forma fundamental de trabajo el debate que propicie la

confrontación de ideas y permita realizar una contribución efectiva a la expresión oral de los estudiantes y al desarrollo del pensamiento lógico.

La implementación de esta propuesta metodológica propicia el cumplimiento de los objetivos propuestos para el trabajo con las funciones lineales en el Instituto Superior Pedagógico.

La propuesta metodológica se ajusta a las exigencias de las transformaciones que se han realizado en la enseñanza de la Matemática en la Enseñanza General Media y está en concordancia con el objetivo de formación de profesores integrales.

## **2.2- La propuesta metodológica utilizando el DERIVE.**

1ro- Una vez que se ha definido la clase de funciones objeto de estudio (Lineales) se debe estudiar el gráfico correspondiente. El DERIVE resulta ser un asistente matemático de fácil acceso por parte de los estudiantes, por lo que se puede ir aprendiendo a trabajar con el mismo en la medida en que se introducen los conceptos sobre las funciones lineales.

En el caso de las funciones lineales se recomienda obtener el gráfico por medio del ploteo de puntos. Para esto el profesor debe enseñar a los estudiantes, del Derive:

- Definir (función)
- Sustituir (una variable)
- Vector (2 dimensiones)
- Representación gráfica (de puntos) en la ventana 2D.

La representación gráfica de los puntos se realizará distribuyendo su determinación entre las parejas de estudiantes que comparten el trabajo en el ordenador (es posible representar hasta 12 puntos), lo que permite agilizar el trabajo. Todos los estudiantes representarán gráficamente los 12 puntos. Los estudiantes realizarán suposiciones sobre la forma del gráfico, la cual será confirmada regresando a la ventana Álgebra, activando la ecuación de la función y representándola gráficamente en la ventana 2D.

2do- Para el estudio del dominio de definición y el conjunto imagen de las funciones se utilizará, en la ventana 2D, el "modo de trazado" para recorrer la

curva, lo que permitirá, junto con la ampliación de la escala en los ejes correspondientes, que los estudiantes realicen suposiciones acerca de estos conjuntos.

Se recomienda trabajar con funciones en las que el dominio se encuentre acotado para lo que es necesario introducir la condicional IF:

La forma general de las expresiones IF es:

IF (test, entonces, en caso contrario, en caso de duda)

donde test es una condición, y entonces, en caso contrario y en caso de duda son expresiones.

3ro- Para el estudio de puntos significativos en los gráficos de las funciones (ceros, intercepto con el eje y, valor máximo, valor mínimo) se procederá como sigue:

Para los ceros: mediante el modo de trazado se comprobará que son puntos en los cuales  $y=0$ . Para calcularlos se utilizará: "Resolver ecuación".

Para el intercepto con el eje y: mediante el modo de trazado se "descubrirá" que es el punto en que  $x=0$  y se calculará utilizando "Sub" para  $x=0$ .

Los valores máximo y mínimo, en los casos en que existan, se obtendrán mediante el modo de trazado, recorriendo la curva o utilizando la condicional IF.

4to- Para el análisis de la monotonía de las funciones se utilizará el modo de trazado (Recorriendo la gráfica de izquierda a derecha se pueden determinar los intervalos de monotonía de la función, observando el comportamiento de las imágenes en la parte inferior de la ventana, en la medida en que aumentan los valores de  $x$ )

5to- El estudio de las transformaciones que sufre el gráfico de una función ( $af(x)$ ,  $f(x)+c$ ,  $f(x+d)$ ) se realizará utilizando la función VECTOR. Esta orden permite representar un conjunto de funciones a partir de los valores asignados al (los) parámetro (s) y mediante el modo de trazado el/la estudiante, bajo la dirección del profesor, puede arribar a conclusiones sobre las transformaciones realizadas.

6to- Elaboración y análisis de mapas conceptuales correspondientes a la clase de funciones, por parte de equipos de estudiantes, con el objetivo de contribuir

a hacer más significativo el aprendizaje. Es importante desarrollar el debate de algunos de los mapas conceptuales elaborados por los diferentes equipos, pues se pueden destacar relaciones que otros no hubieran notado.

7mo- Para fijar los conceptos y procedimientos se realizará una ejercitación variada, atendiendo a:

- La presencia de ejercicios que combinen el trabajo "a mano" con el trabajo en la máquina, con el objetivo de desarrollar habilidades que se pueden perder si sólo se trabaja con la máquina. Unas veces se realizará el trabajo a mano y se comprobará en la máquina, otras veces, a partir del trabajo en la máquina se realizarán los análisis, deducciones y generalizaciones necesarios.
- La utilización de ejercicios que se resuelvan íntegramente haciendo uso del medio informático.
- El empleo de diferentes tipos de ejercicios, particularmente aquellos en que sea imprescindible realizar diferenciación de casos, realizar valoraciones sobre parámetros dados, que impliquen la toma de decisiones.
- Inclusión de ejercicios que conduzcan a la obtención de nuevos conocimientos relacionados con el tema o que impliquen la realización de pequeñas investigaciones para poder solucionarlos, lo que permite utilizar otros recursos informáticos como enciclopedias, tutoriales y otros software.
- Resolución de ejercicios que relacionen las funciones lineales con otros temas de la Matemática.
- Inclusión de problemas relacionados con la vida cotidiana y que contribuyan a la formación ideopolítica de los estudiantes.

En el Anexo # 3 se presenta un material que ilustra cómo realizar el trabajo con las funciones lineales a partir de la aplicación de la metodología anterior. Este sirvió de base a la realización de la experiencia que se detalla en el siguiente epígrafe.

Se han reflejado en dicho material de forma exhaustiva los procedimientos utilizados para representar las funciones lineales y analizar sus propiedades.



Algunos de estos procedimientos han sido concebidos por el autor de la tesis a partir de las posibilidades técnicas que ofrece el asistente informatizado. Se incorporó a continuación uno de los mapas conceptuales que resultó del debate de los mapas confeccionados por los/las estudiantes.

El material se completa con una colección de ejercicios que fueron utilizados en las clases. Algunos de estos ejercicios se obtuvieron realizando las adaptaciones necesarias para el trabajo con el DERIVE a los ejercicios del libro de texto de Matemática, 8vo grado, ejercicios del folleto “Matemática, colección de ejercicios y problemas”, libros de Física, 8vo grado y Geografía Económica, 8vo grado. El resto fueron creados por el autor de la tesis.

Estos ejercicios responden a las exigencias planteadas en la propuesta metodológica anterior, quedando distribuidos de la siguiente forma:

- Ejercicios que combinan el trabajo “a mano” con el trabajo en la computadora: 1, 2, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32.
- Ejercicios donde se trabaja sólo con la computadora: 3, 14, 17.
- Ejercicios a partir de los cuales los estudiantes se apropian de nuevos conocimientos relacionados con el tema: 5, 6, 7, 8.
- Ejercicios que relacionan el contenido de las funciones lineales con otros temas de la Matemática: 12, 16, 19, 20, 22, 27.
- Ejercicios de aplicación a la vida cotidiana y a otras ciencias: 19, 23, 24, 25, 28, 29, 30, 31, 32.
- Ejercicios que implican análisis de parámetros, diferenciaciones de casos, toma de decisiones : 26, 27.
- Ejercicios que conllevan la realización de pequeñas investigaciones o indagaciones: 28, 33, 34, 35.

### **2.3- Una experiencia de aplicación de la propuesta metodológica.**

La experiencia se realizó con tres equipos de estudiantes (13 en total), provenientes de los Institutos Tecnológicos, asignados al autor de esta tesis para la realización de trabajos científicos extracurriculares. Los estudiantes cursaban el primer año de la carrera de Matemática-Computación en el curso

2001-2002. Generalmente estos/as estudiantes ingresan a la carrera con muy mala formación matemática, no obstante se consideró oportuno realizar una exploración acerca de sus conocimientos sobre funciones. En el anexo # 4 se muestra el cuestionario que se les aplicó.

Los resultados se correspondieron con los que se obtienen habitualmente con los/las estudiantes provenientes de este tipo de centros. Sólo uno de los estudiantes (7,6%) pudo exponer la definición de función, sólo dos estudiantes reconocieron cuáles eran funciones y cuáles no lo eran en todos los casos, de acuerdo con los gráficos que se brindaban y en ninguno de los casos pudieron plantear una ecuación que representara la problemática que se les planteaba. (El resto de los resultados se puede apreciar en el anexo # 5) Todo esto corroboró el no desarrollo de un pensamiento funcional matemático en los estudiantes, por lo que se consideró que el grupo reunía los requisitos necesarios para la realización de la investigación.

El trabajo se inició con el tratamiento del concepto de función y posteriormente se aplicó la propuesta metodológica para las funciones lineales, tal y como está concebida, pues los estudiantes no tenían ningún conocimiento acerca del asistente matemático DERIVE. Al concluir el tema se aplicó un nuevo diagnóstico (Ver anexo # 6) y los resultados fueron muy positivos. Todos los estudiantes pudieron explicar la definición de función y particularizar al caso de la función lineal. En el 76,9% de los casos pudieron plantear las ecuaciones que representaban cada una de las problemáticas presentadas. Estos resultados (Anexo # 7) crearon las condiciones para continuar trabajando con otras clases de funciones, como se explica a continuación:

Se realizó el trabajo con el tema de funciones cuadráticas, propiciando una mayor independencia de los estudiantes en el estudio de las propiedades de estas funciones a partir del trabajo con el DERIVE. Ante el avance experimentado se decidió que estudiaran por dúos el resto de las clases de funciones y expusieran sus resultados. La experiencia fue totalmente satisfactoria. Excepto en el caso de funciones que tienen restricciones en el dominio de definición, como la tangente y la cotangente, no hubo dificultades dignas de destacar.

Para culminar la experiencia se aplicó un test de salida con el objetivo de verificar el cumplimiento de los objetivos del tema y la existencia o no de un pensamiento funcional matemático desarrollado en los/las estudiantes. Esta prueba se realizó en la computadora, utilizando el asistente matemático. En el anexo # 8 se muestran las problemáticas a las que fueron sometidos:

Entre los resultados más importantes se encuentran:

- El 100% de los estudiantes reconoció las variables existentes en la situación problemática.
- El 100 % distinguió las variables independientes, las dependientes y las intermedias.
- El 92,3% planteó correctamente la ecuación de la función que representaba la problemática.
- El 92,3% planteó una ecuación general en el caso en que no era posible utilizar una de las clases de funciones conocidas.

El estudiante que no realizó adecuadamente las dos últimas acciones había mantenido un comportamiento inestable en el trabajo que se realizó con estos equipos. Una comparación entre los resultados de las tres pruebas aplicadas se muestra en el Anexo # 9. De acuerdo a los indicadores establecidos para medir el pensamiento funcional matemático, se puede apreciar que en sólo uno de los 13 estudiantes no se produjeron los cambios esperados.

Para poder constatar la validez de los resultados obtenidos se aplicó la prueba estadística de Mc Nemar para la significación de cambios. Para esto se plantearon las hipótesis:

Ho: La aplicación de la propuesta metodológica para la enseñanza de las funciones utilizando el asistente matemático DERIVE no ejerce influencias en el desarrollo del pensamiento funcional matemático de los estudiantes. La probabilidad de encontrar un estudiante que tenga un pensamiento funcional matemático es la misma antes que después de haberse aplicado la propuesta metodológica, e igual a 0,5.

Ha: La aplicación de la propuesta metodológica para la enseñanza de las funciones utilizando el asistente matemático DERIVE favorece el desarrollo del pensamiento funcional matemático de los estudiantes. La probabilidad de

encontrar un estudiante que tenga un pensamiento funcional matemático es mayor después de haberse aplicado la propuesta metodológica.

Nivel de significación: Para garantizar la fiabilidad se asume  $\alpha=0,01$

Definición de la región de rechazo: Comparando con los valores de la tabla de valores críticos de Chi Cuadrado con un número de grados de libertad constante e igual a 1, para el nivel de significación escogido, es  $\chi^2 = 6,64$

Calculando:

$$\chi^2 = \frac{(|f_D - f_{ND}| - 1)^2}{f_D + f_{ND}}$$

Donde:

$f_D$  es el número de estudiantes con los cambios deseados después de aplicar la metodología (12)

$f_{ND}$  es el número de estudiantes sin los cambios deseado después de aplicar la metodología (1)

se obtiene  $\chi^2 = 7,69$ .

Como el valor de la  $\chi^2$  calculada a partir de los registros es mayor que la  $\chi^2$  crítica que aparece en la tabla para el nivel de significación elegido y los grados de libertad que exige Mc Menar, se rechaza la hipótesis  $H_0$  y se puede emitir el criterio de que la metodología aplicada contribuye al desarrollo del pensamiento funcional matemático en los/las estudiantes.

### **Conclusiones del Capítulo:**

La realización de la experiencia en el tema de Funciones lineales mostró cómo se pueden ir integrando los elementos teóricos relacionados con el asistente con la enseñanza de las funciones. Este debe ser un elemento a tener en cuenta en la elaboración de una propuesta metodológica general.

La utilización del asistente matemático demostró lo importante que resulta el aprovechamiento de las posibilidades de graficación que ofrece, lo que permitió una mejor comprensión del resto de las propiedades de las funciones estudiadas, por lo que es recomendable un cambio en el procedimiento para

estudiar las propiedades de las funciones: analizarlas a partir del gráfico y luego formalizarlas.

La aplicación de la propuesta metodológica en las primeras clases de funciones permitió aumentar la independencia de los estudiantes para el estudio del resto de las clases, lo que significó un reforzamiento del rol del profesor como facilitador, como guía del aprendizaje.

En la propuesta metodológica general el trabajo con los problemas debe ser reforzado, propiciando que los/las estudiantes sean capaces de formular y resolver problemas a partir del análisis de la información recopilada en el medio informático o en la comunidad.

Se precisa la reformulación de algunos de los objetivos relacionados con el estudio del tema, a partir de las posibilidades de graficación de los asistentes matemáticos.

La combinación del aprendizaje individual y cooperativo a partir del trabajo con el medio informático crea un ambiente muy favorable para propiciar el desarrollo del pensamiento y relaciones afectivas muy beneficiosas para el cumplimiento de los objetivos propuestos.

El desarrollo de la experiencia de constatación y la profundización en el análisis de diferentes artículos propiciaron el esclarecimiento sobre aspectos fundamentales relacionados con el pensamiento funcional matemático y agregar otros indicadores a los tres que se tuvieron en cuenta. Este nuevo sistema de indicadores fue sometido al criterio de expertos (los resultados se muestran en el anexo # 10). Resulta significativo que de acuerdo al criterio de los expertos todos los indicadores resultaron imprescindibles para medir la variable (pensamiento funcional matemático).

La experiencia llevada a cabo con los estudiantes del primer año de la carrera de Matemática-Computación permitió verificar que es posible contribuir al desarrollo del pensamiento funcional matemático de los/las estudiantes aplicando adecuadamente la propuesta metodológica elaborada al respecto.

Las valoraciones acerca de los resultados de esta experiencia y la profundización en el estudio de las posibilidades de trabajo que brinda la

Informática hicieron posible identificar la manera en que la utilización del medio informático influye en el desarrollo del pensamiento funcional:

- La combinación de la utilización de video, sonido, textos y todas las posibilidades que brinda la multimedia favorece el aprendizaje de cualquier contenido, en particular el que resulta objeto de estudio en esta tesis: las funciones matemáticas.
- La posibilidad de mostrar en videos o presentaciones electrónicas diversas situaciones de la vida real en las que se presentan dependencias funcionales favorece el análisis por parte de los/las estudiantes de la existencia de variables y las relaciones de dependencia entre ellas.
- Las posibilidades de graficación que brindan los asistentes matemáticos permiten ahorrar un tiempo considerable que puede ser utilizado en función de la realización de actividades directamente encaminadas a la modelación de procesos y fenómenos utilizando funciones matemáticas y a la exploración de patrones que modelen otros procesos y fenómenos de comportamiento similar.
- Si bien el cambio que se produce en la graficación al utilizar asistentes matemáticos no contribuye al desarrollo de habilidades en la graficación en el sentido que se consideraba hasta ahora, el reforzamiento que se produce en el análisis de las propiedades de las mismas permite lograr el dominio de un amplio repertorio de formas visuales que pueden ser utilizadas aún cuando no se cuente con el asistente para resolver el problema.
- La representación de gráficos de diversas funciones en una misma ventana propicia el análisis de propiedades de éstas, relaciones entre funciones y sus derivadas, entre primitivas, que refuerzan los conocimientos de los/las estudiantes sobre el concepto de función y contribuyen a descubrir las relaciones de dependencia existentes.
- La animación de procesos de acercamiento, de aproximación, como sucede con el límite o la derivación, contribuye no solo a entender estos conceptos, sino también a la comprensión del comportamiento de las

variables dependientes e independientes, contribuyendo al desarrollo del pensamiento funcional matemático.

Esto crea las condiciones para realizar una propuesta metodológica general para la utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones con el objetivo de lograr un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de las funciones matemáticas.

### **CAPÍTULO III PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA UTILIZACIÓN DE LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LAS COMUNICACIONES CON EL OBJETIVO DE PROPICIAR UN PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DESARROLLADOR DE LAS FUNCIONES MATEMÁTICAS.**

En este capítulo se presenta una propuesta metodológica que permite la utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones para propiciar un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de las funciones matemáticas, precedida de algunas consideraciones generales sobre la misma. Se dedica el tercer epígrafe de este capítulo a la descripción de la aplicación del método de expertos Delphy para la valoración de la propuesta metodológica.

#### **3.1- Consideraciones generales sobre la propuesta metodológica.**

La propuesta metodológica que se plantea en este epígrafe es el resultado de la investigación en la búsqueda de las vías más adecuadas para la introducción de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones. Partiendo de la consulta a expertos, de un profundo estudio bibliográfico sobre el tema, el análisis de experiencias llevadas a cabo en diversos países y de la experiencia realizada con estudiantes de la carrera de Matemática-Computación del I.S.P."Enrique José Varona", se pudieron realizar generalizaciones para el empleo de las tecnologías de la información y las comunicaciones en función del logro de un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de las funciones matemáticas.

Las peculiaridades del trabajo con las tecnologías de la información y las comunicaciones que contribuyen a propiciar un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de las funciones matemáticas en sentido general, son:



- a) La posibilidad de realizar un aprendizaje cooperativo al trabajar en dúos en cada máquina o en pequeños equipos conectados en red.
- b) La búsqueda de información relacionada con la vida cotidiana y la Ciencia en general, en diferentes soportes, unida a la simulación de procesos y fenómenos difíciles de observar en la práctica propician un elevado grado de motivación que favorece el aprendizaje de los estudiantes.
- c) La posibilidad de diseñar una estrategia de trabajo atendiendo a los intereses, particularidades y necesidades de los/las estudiantes a partir del diagnóstico integral y poderla corregir en la medida en que el/la estudiante avanza o no en el trabajo en la máquina.
- d) La posibilidad de formular y resolver problemas reales a partir de la información recopilada a través del medio informático hace que los/las estudiantes se sientan capaces de explorar, descubrir y hacer por transformar la realidad.
- e) Permite la participación activa de los estudiantes en la construcción y organización del conocimiento.
- f) La posibilidad de equivocarse en la resolución de un ejercicio en la máquina e intentar llegar a la respuesta tantas veces como sea necesario, sin estar sometidos a la crítica colectiva, favorece el desarrollo de la perseverancia, cualidad de gran importancia en su formación como investigadores y propicia la autovaloración, al reflexionar sobre el proceso de aprendizaje.

Los asistentes matemáticos utilizados presentan características que facilitan la graficación y permiten conducir a los/las estudiantes a “descubrir” determinadas propiedades básicas en el estudio de las funciones matemáticas, lo que ha sido aprovechado en esta propuesta metodológica..

Se tuvieron en cuenta indicaciones emanadas de la Metodología de la Enseñanza de la Matemática, cuya eficacia ha sido demostrada en numerosas ocasiones y se adoptaron formas de trabajo recomendadas por los autores de la teoría sobre la educación desarrolladora.

### **3.2- La propuesta metodológica .**

- 1- La labor del profesor como mediador del proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones matemáticas debe estar dirigida a promover y acompañar el aprendizaje de los/las estudiantes, convertirse en un facilitador del mismo, partiendo de su profundo dominio del tema, del trabajo con el recurso informático, del diagnóstico integral de cada uno de los estudiantes y del funcionamiento como grupo, propiciando la máxima comunicación, enfrentando a los estudiantes a situaciones que provoquen el debate, el intercambio de ideas y la propuesta de soluciones a los problemas a los que se enfrentan. Brindará atención especial al papel de cada estudiante como aprendiz en el proceso de enseñanza-aprendizaje, teniendo en cuenta las características personales de cada uno de ellos, sus estilos de aprendizaje, sus motivaciones, sus limitaciones y condiciones socioeconómicas. Garantizará las condiciones y las tareas para propiciar el tránsito gradual del desarrollo desde los niveles inferiores hacia niveles superiores.
- 2- La labor de mediadores del grupo de estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones matemáticas estará facilitada a partir del trabajo en dúos en cada máquina, en caso de que no estén conectadas en red. De esta manera se producirá el debate e intercambio de ideas, el planteamiento de interrogantes que estimulen el autoaprendizaje, la búsqueda y procesamiento de información complementaria, la metacognición. Esta labor puede ser apoyada por el profesor con el empleo de guías y hojas de trabajo, la clara distribución de responsabilidades, el intercambio de roles en el dúo o equipo de estudiantes, la búsqueda y análisis de documentos escritos o audiovisuales o con propuestas con las que se pueda incidir en un área determinada de la sociedad.
- 3- La introducción de las tecnologías de la información y las comunicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones matemáticas propicia la realización de cambios en los objetivos. Se deben eliminar o modificar los siguientes:

- desarrollar habilidades en la representación gráfica de funciones, apoyándose en la representación de puntos en el plano coordenado.
- Aplicar procedimientos para el cálculo de límites, cálculo de derivadas, análisis del crecimiento de una función, determinación de valores aproximados, cálculo de integrales y cálculo de áreas.
- Aplicar las reglas del cálculo de derivadas e integrales indefinidas al cálculo y a la resolución de problemas simples.
- Resolver mediante reflexiones lógicas ecuaciones diferenciales muy simples.

Todas estas operaciones se realizan con exactitud y en un tiempo muy breve utilizando los asistentes matemáticos.

En lugar de los objetivos anteriores se incluirán los siguientes:

- Representar gráficamente las funciones matemáticas empleando asistentes matemáticos informatizados.
- Calcular límites, derivadas e integrales utilizando asistentes matemáticos informatizados.
- Resolver ecuaciones diferenciales de 1ro y 2do órdenes con coeficientes constantes, empleando asistentes matemáticos informatizados.
- Comprobar las soluciones de ecuaciones diferenciales sencillas, obtenidas a través del empleo de asistentes matemáticos informatizados, resolviéndolas mediante reflexiones lógicas.
- Modelar procesos y fenómenos de la realidad objetiva mediante el empleo de ecuaciones de funciones conocidas o ecuaciones funcionales en general.
- Reconocer a partir del análisis de los gráficos de las funciones:
  - Las transformaciones del gráfico de una función dada (traslaciones, dilataciones, contracciones y reflexiones).
  - Las relaciones existentes entre el gráfico de una función y su inversa.
  - Las relaciones existentes entre los gráficos de una función y sus derivadas.

- Las relaciones existentes entre las primitivas de una función dada.
  - Propiedades de las soluciones de las ecuaciones diferenciales de 1er y 2do órdenes con coeficientes constantes.
  - Formular problemas relacionados con otros contenidos matemáticos y con la comunidad.
  - Resolver problemas relacionados con otros contenidos matemáticos, con la comunidad y con los estudios sobre Ciencia, Tecnología y Sociedad (CTS), aplicando los contenidos sobre funciones.
- 4- En cuanto a los contenidos no se producen cambios significativos; los cambios se producen fundamentalmente en los procedimientos y métodos a emplear. A partir del enfoque que se pretende dar al estudio de las funciones se debe incluir como contenido una selección de problemas relacionados con los estudios sobre Ciencia, Tecnología y Sociedad (CTS).

La inclusión de problemas relacionados con los estudios CTS contribuye a dar una mayor relevancia a las clases de ciencias, en particular a las de Matemática. Se produce un considerable aumento del interés de los/las estudiantes al relacionar la Matemática con cuestiones humanas, éticas y políticas. Se estimula su actividad investigativa, una actitud positiva hacia el desarrollo científico y tecnológico y les ayuda a comprender cual debe ser la actitud de cada ciudadano ante estos desarrollos y su efecto sobre el medio ambiente y la sociedad, realizándose de esta manera una contribución a los principios que se deben tener en cuenta para la creación de situaciones de enseñanza-aprendizaje desarrolladoras.

- 5- Sobre los métodos y procedimientos:

Deben predominar los métodos que estimulen la actividad productiva de los estudiantes; es decir, la exposición problémica, búsqueda parcial o heurístico, investigativo, juegos didácticos, discusiones temáticas y estudios de casos.

El uso de la computadora para mediar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones se debe diseñar de forma que se creen espacios para la búsqueda, procesamiento y la aplicación de la información relativa a las funciones matemáticas y contenidos de la práctica relacionados con estos, ya sea en la clase o fuera de ella, para promover el encuentro con otros individuos y la apropiación de las posibilidades estéticas y lúdicas que van ligadas a las diferentes creaciones.

Cualesquiera sean los asistentes matemáticos informatizados seleccionados para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje de las funciones, teniendo en cuenta la “amigabilidad” con que han sido confeccionados, su aprendizaje se debe realizar simultáneamente con el contenido sobre funciones que se esté abordando.

Se deben aprovechar las posibilidades de graficación que ofrecen los asistentes matemáticos para el logro de la comprensión de las relaciones existentes entre el gráfico de una función y su inversa, transformaciones del gráfico de una función (traslaciones, reflexiones, dilataciones, contracciones), derivadas, primitivas y de las soluciones de ecuaciones diferenciales de 1ro y 2do órdenes con coeficientes constantes, propiciando en todos los casos que los estudiantes sean los que “descubran” dichas relaciones.

Se producirán cambios significativos en algunos de los procedimientos utilizados tradicionalmente:

A) Para la graficación de funciones se utilizarán los asistentes matemáticos, por lo que el procedimiento será el concebido en la concepción del asistente seleccionado. Por ejemplo, si se utiliza el Derive, se procederá siguiendo la secuencia de pasos establecida para el asistente, que resulta de muy fácil memorización, por lo que los/las estudiantes se apropiarán rápidamente de este procedimiento, lo que permitirá un ahorro considerable de tiempo. En el caso de algunas funciones elementales se puede verificar el gráfico realizado por la máquina graficando “a mano”, lo que permite contribuir a fijar la

relación entre el gráfico y la función y da la posibilidad de inculcar en los estudiantes la idea de que no se puede tener fe ciega en los resultados que ofrece la máquina y la necesidad de analizar la lógica de los resultados.

- B) Propiedades que se utilizaban para construir el gráfico (ceros, vértices, monotonía, paridad, periodicidad) se podrán determinar ahora a partir del gráfico y luego serán formalizadas. Se recomienda proceder en sentido contrario en algunos casos: determinar los elementos necesarios para construir el gráfico utilizando los asistentes, construir el gráfico “a mano” y comprobar el resultado en la máquina.
- C) Para el análisis del dominio de definición y la imagen de funciones que se analizaban proyectando el gráfico sobre los ejes coordenados  $x$  e  $y$  respectivamente, se utilizará ahora el “modo de trazado”, que permite recorrer el gráfico, y la ampliación o reducción de la escala de los ejes coordenados, según convenga. Se producirá de esta manera un reforzamiento en la comprensión por parte de los estudiantes del no acotamiento del dominio de definición y/o la imagen de determinadas funciones.
- D) El cálculo de límites, derivadas e integrales se realizará con el empleo del asistente matemático. De manera similar se procederá con la resolución de ecuaciones diferenciales de 1ero y 2do órdenes con coeficientes constantes.

La utilización de la computadora facilitará la elaboración y asimilación de conceptos fundamentales como los de límite de una función en un punto, límites laterales, derivada de una función en un punto, primitiva, integral definida e indefinida, a partir del aprovechamiento de la multimedia en animaciones y videos que permiten, por ejemplo, mostrar cómo las secantes se acercan a la posición límite (tangente a una curva en un punto) en el análisis de la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.

La animación de gráficos facilita la comprensión del concepto de límite al infinito y límites laterales, como se muestra en el libro electrónico multimedia *Calculus*.

Otros contenidos, como la interpretación física de la derivada de una función en un punto, se pueden abordar en debate posterior a la búsqueda por parte de los/las estudiantes en una enciclopedia electrónica.

Las transformaciones anteriores posibilitan un ahorro considerable de tiempo, lo que permitirá centrar el trabajo en:

- El análisis de los aspectos teóricos esenciales, en la fundamentación de los procedimientos utilizados, en favorecer la metacognición y en el análisis de la lógica de los resultados obtenidos.
- En la elaboración y asimilación de conceptos. En el caso de la vía inductiva para la elaboración de conceptos, el empleo de la computadora facilitará la búsqueda de las características comunes de los objetos que se investigan y el reconocimiento de las características esenciales, hasta llegar a elaborar la definición del concepto, procediendo de la siguiente manera: presentar un software con el que el estudiante pueda interactuar en la determinación de las características comunes y esenciales y cada dúo llevará al debate una propuesta de concepto. Este recurso informático se puede confeccionar de manera tal que solo sea necesario cambiar la biblioteca de datos para la elaboración de otros conceptos.
- En la determinación de las relaciones entre los conceptos, para lo que se elaborarán mapas conceptuales por parte de los dúos o equipos de estudiantes, los que deben ser objeto de debate en las clases. Para esto el profesor comenzará el trabajo con mapas conceptuales incompletos para que sean completados por los estudiantes y en la medida en que se van desarrollando los temas, irlos entrenando en esta tarea hasta que lleguen a confeccionar sus propios mapas.

- En la demostración de teoremas para contribuir al adiestramiento lógico, mediante la búsqueda de demostraciones, el empleo de inferencias lógicas en la representación de demostraciones y en la utilización de los medios que permiten la racionalización del trabajo mental. Para la búsqueda de teoremas se puede confeccionar un software similar, en cuanto a su estructura, al utilizado en la elaboración de conceptos y proceder de manera similar en lo que respecta a la búsqueda de suposiciones y planteamiento de una tesis. En el debate se analizará la propuesta de cada dúo.

Ejemplo: La utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones resulta de gran ayuda en el trabajo de elaboración del grupo de teoremas fundamentales del Cálculo Diferencial, pues este se facilita a partir de la representación de gráficos de funciones, de forma animada, para la determinación de condiciones necesarias y suficientes,

- En la formulación y resolución de problemas. La formulación de problemas puede ser aprovechada para propiciar el trabajo en grupo y realizar un aprendizaje cooperativo. En esta dirección se puede orientar realizar por equipos la búsqueda de datos sobre determinados contenidos con los que se puedan elaborar problemas. Por ejemplo, al estudiar las funciones exponenciales se puede orientar la indagación, ya sea en centros de investigación o utilizando enciclopedias electrónicas, de los factores que influyen en el crecimiento de una población de bacterias y a través del debate determinar variables dependientes, intermedias e independientes y profundizando en la bibliografía llegar a conclusiones sobre el modelo que se utiliza para representar este proceso. La presentación de los resultados, en los que se incluirá una selección de problemas confeccionados por los estudiantes se puede realizar mediante una presentación electrónica.
- En la búsqueda, procesamiento y aplicación de información en el medio informático y el debate de los resultados. En este sentido se



puede propiciar el autoaprendizaje al orientar el estudio de contenidos del tema que no resulten de gran complejidad y que amplíen sus horizontes, como sucede en el caso de la historia del surgimiento y desarrollo de los contenidos que se estén estudiando, para lo que resultan muy útiles las enciclopedias electrónicas y software confeccionados para la enseñanza por los grupos científicos estudiantiles y centros de elaboración de software educativos de los Institutos Superiores Pedagógicos del país.

E) Para fijar los conceptos y procedimientos se atenderá a:

- La presencia de ejercicios que combinen el trabajo "a mano" con el trabajo en la máquina, con el objetivo de desarrollar habilidades que se pueden perder si sólo se trabaja con la máquina. Unas veces se realizará el trabajo a mano y se comprobará en la máquina, otras veces, a partir del trabajo en la máquina se realizarán los análisis, deducciones y generalizaciones necesarios. Ejemplos:
  - a) Si se desea investigar la relación existente entre los gráficos de las funciones  $f(x)=3x+1$  y  $g(x)=x^2+x-3$ , el trabajo se reduce a la resolución de la ecuación cuadrática  $x^2-x-2=0$ , que se resuelve fácilmente con el empleo del asistente matemático, pero se desaprovecharía de esta forma la posibilidad de reforzar el tecnicismo algebraico, por lo que es recomendable que se realice este trabajo "a mano" y se verifiquen los resultados obtenidos mediante la representación gráfica de las dos funciones utilizando el asistente.
  - b) Si se pretende estudiar las propiedades del gráfico de una función, por ejemplo:  $f(x)=x^4+2x^3-2x+1$ , se obtiene rápidamente su gráfico utilizando un asistente, lo que resulta trabajoso si se realiza aplicando el cálculo diferencial u otro procedimiento. A partir de aquí se pueden realizar las valoraciones necesarias sobre sus propiedades.
- El empleo de diferentes tipos de ejercicios, particularmente aquellos en que sea imprescindible realizar diferenciación de casos, realizar

valoraciones sobre parámetros dados, que impliquen la toma de decisiones. Estos ejercicios propician la construcción activa y personal del conocimiento por parte de los/las estudiantes y constituyen actividades desafiantes que ponen a prueba su capacidad de análisis y reflexión.. Ejemplos:

- a) Representa gráficamente las funciones  $f(x)=ax^2$ , utilizando el medio informático, para diferentes valores de  $a \in \mathbb{R}$ . ¿Qué características tiene el gráfico de las funciones para los diferentes valores de  $a$ ? (Evidentemente con este ejercicio se pretende que los estudiantes arriben a conclusiones sobre la dilatación, contracción y reflexión del gráfico de una función cuadrática, lo que pueden hacer a partir de la analogía con el caso de las funciones lineales ya estudiadas)

b) Calcula:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{4x^{2n-3} + 2x + 1}$  ,  $n \in \mathbb{Z}$

Para el caso  $n=2$  valora el resultado del análisis del límite a partir del comportamiento de los gráficos de las funciones del numerador y del denominador de la función racional fraccionaria dada.

- Inclusión de ejercicios que conduzcan a la obtención de nuevos conocimientos relacionados con el tema o que impliquen la realización de pequeñas investigaciones para poder solucionarlos, lo que permite utilizar otros recursos informáticos como enciclopedias, tutoriales y otros software.

La resolución de problemas de aplicación a la vida cotidiana o a otras ciencias generalmente implica la realización de indagaciones acerca del tema en el que se realiza la aplicación. Así, por ejemplo, para resolver el problema 28 del anexo # 3 el /la estudiante debe indagar cómo se realiza la lectura de un metro contador cuando este consta de 6 dígitos, para lo que debe buscar información escrita o consultar a sus familiares o a los compañeros que miden el consumo de electricidad en sus hogares, apropiándose de un conocimiento que

resulta muy útil para la vida diaria en el afán de contribuir al programa de ahorro de electricidad.

- Inclusión de problemas relacionados con la vida cotidiana, su comunidad y la comunidad en que se encuentra enclavado el centro de estudios y vinculados con los estudios CTS, que contribuyan a la formación ideopolítica de los estudiantes, prestando más atención a las vías de resolución y a la ganancia metodológica que se pueda extraer del proceso de resolución, para favorecer el desarrollo del pensamiento.
- Inclusión de ejercicios que vinculen los contenidos que se estudian con otros temas de la Matemática y que permitan dar cumplimiento a las orientaciones de los nuevos programas de Matemática sobre la estimación y trabajo con valores aproximados. Ejemplo:

Representa gráficamente, utilizando el Derive, las funciones cuyas ecuaciones se dan a continuación:  $f(x)=4$ ,  $g(x)=8$ ,  $h(x)=x+2$ ,  $p(x)=-x+10$ ,  $t(x)=x-8$  y  $m(x)=-x+20$ .

- a) Identifica la figura geométrica que se forma.
  - b) Utilizando el método de las rejillas, determina aproximaciones del área para rejillas de intervalos (20,20), (30,30) y (40,40).
  - c) Determina el valor exacto del área utilizando tus conocimientos geométricos. ¿Cuál de las estimaciones anteriores constituye una mejor aproximación del área de la figura?.
- 6- El medio de enseñanza fundamental concebido para este tema es la computadora. Se aprovechan en esta propuesta tres de sus formas de empleo reconocidas: como medio de enseñanza, como herramienta de trabajo y en la simulación de procesos y fenómenos.

Resulta muy apropiada la utilización en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones de presentaciones electrónicas (*Power point*, por ejemplo), asistentes matemáticos informatizados como el DERIVE y *Cabri-Geometry*, y libros electrónicos multimedia como *Prematic* y *Calculus*, lo que no elimina la posibilidad de utilizar software

elaborados por el profesor y otros productos del trabajo científico estudiantil y las enciclopedias electrónicas.

Se concibe en esta propuesta el apoyo al trabajo con la computadora a través del empleo de hojas de trabajo y guías para la orientación de la actividad de los estudiantes.

- 7- Las formas de enseñanza que deben predominar en el proceso de enseñanza aprendizaje de las funciones, en cuanto a las clases deben ser el seminario taller (el profesor orienta el trabajo, declara los objetivos que se persigue lograr, entrega los materiales necesarios, ofrece las instrucciones mínimas para el trabajo con el asistente matemático y los estudiantes se apropian de la información necesaria en la máquina bajo la orientación del profesor y luego se procede al debate), el seminario y las prácticas de laboratorio. En lo referente a la actividad extradocente, debe predominar el trabajo con la comunidad y con centros de producción e investigación para la recolección de datos con los que se puedan formular y resolver problemas.
- 8- Utilizar las potencialidades de la Informática en función de la creación de cuestionarios interactivos que permitan la evaluación en tiempo real del estudiante con la utilización de la computadora, preparación de programas “demos” con los paquetes matemáticos donde se pueda seguir la traza en la lógica del trabajo del estudiante, acompañado de la observación por parte del profesor del desarrollo que demuestra cada estudiante en la búsqueda y procesamiento de la información, de la originalidad que demuestran en la resolución de ejercicios y problemas, de las posibilidades que demuestran de formular y resolver problemas y de la organicidad de sus planteamientos en los debates.

### **3.3- Valoración de la propuesta metodológica utilizando el método de expertos Delphy.**

Para la valoración de la propuesta metodológica se utilizó el método de expertos Delphy. Se consideró expertos a los profesionales capaces de ofrecer valoraciones conclusivas sobre la metodología propuesta y hacer

recomendaciones respecto a sus aspectos fundamentales con un máximo de competencia. En este sentido se exigieron como requisitos mínimos para integrar la lista inicial de posibles expertos:

- Que fueran profesores de Matemática
- Que tuvieran experiencias acerca de la utilización de la Informática en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.
- Que tuvieran conocimientos acerca de la educación desarrolladora, enseñanza desarrolladora y aprendizaje desarrollador.

Esta lista la integraron 55 profesores, distribuidos de la siguiente forma:

Procedencia	Cantidad de profesores
Profesores de los Institutos Superiores Pedagógicos	23
Profesores de otros Centros de Educación Superior	21
Funcionarios del Ministerio de Educación	6
Investigadores del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas.	5

A 48 de estos posibles expertos se les sometió a una autovaloración de los niveles de información y argumentación que poseen sobre el tema. Con el resto no fue posible contactar.

Para la determinación del coeficiente de competencia  $K$  de los mismos (el cual se calcula de acuerdo con la opinión del experto sobre su nivel de conocimiento acerca del problema que se está resolviendo y con las fuentes que le permiten argumentar sus criterios) se utilizó la fórmula:

$$K = \frac{1}{2} (k_c + k_a)$$

Se considera en la fórmula como  $k_c$  el coeficiente de conocimiento o información que tiene el experto acerca del problema, el cual se calcula a partir de la valoración del propio experto en una escala del 0 al 10 y se multiplica por

0,1. Cada experto marcó con una cruz en la casilla que denota su nivel de conocimiento del tema, según su criterio.

Por otra parte,  $k_a$  es el coeficiente de argumentación o fundamentación de los criterios del experto, que se obtuvo para cada caso como resultado de la suma de los puntos alcanzados a partir de la tabla patrón que aparece en el anexo #12 a)

Posteriormente, utilizando esta tabla patrón se calcularon los coeficientes de competencia de cada experto, resultando, como se puede observar en la tabla b) del anexo # 12, que un total de 33 especialistas tienen un coeficiente de competencia alto ( $K \geq 0,8$ ), por lo que fue con ellos con los que se decidió continuar trabajando.

Estos expertos pertenecen a 7 Centros de Educación Superior, a la instancia central de Ministerio de Educación y al Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, distribuidos de la siguiente manera:

Doctores	15
Master en Ciencias	13
Licenciados	5

Se procedió a continuación a someter a criterio de los expertos la propuesta metodológica elaborada por el autor de la tesis. Para esto se les aplicó el instrumento que se recoge en el Anexo # 13. Para facilitar la evaluación de las indicaciones por parte de los expertos y poder tener una valoración exacta de cada una de ellas, en el documento que se les entregó se descompuso cada orientación en la mayor cantidad de aspectos posibles.

Se propició el anonimato al garantizar que los miembros del grupo de expertos evaluarán cada indicación metodológica sin confrontarse entre sí

Se facilitó que los expertos valoraran alternativas a sus respuestas y que expusieran sus argumentos en los casos que lo consideraran necesario.

En el Anexo # 14 se resumen las respuestas de los expertos y el tratamiento estadístico realizado.

En cuanto a los resultados obtenidos se puede destacar:

- La alta concordancia de expertos en la valoración de las indicaciones metodológicas 1,5.1,5.22 y 6.1, todas con el 100% en la categoría de muy adecuada. Se destacan también, por coincidir en esta categoría más del 90% de los expertos, las indicaciones 3.19, 5.2, 5.17 y 5.18.
- Sólo hubo cinco de las indicaciones metodológicas a las que se le otorgó la categoría de poco adecuada por un número reducido de los expertos.
- Resulta significativo que las dos indicaciones que tuvieron más evaluaciones de poco adecuadas son las relacionadas con la realización, utilizando el asistente matemático, de operaciones como el cálculo de límites, derivadas, integrales y resolución de ecuaciones diferenciales, lo que denota cierta resistencia al cambio por parte de algunos de los expertos, lo que se corresponde con lo que sucede en la práctica con profesores de la disciplina.
- En ninguno de los casos se otorgó la categoría de no adecuada a ninguna de las indicaciones metodológicas

Estas observaciones constituyen una muestra del grado de aceptación que tuvo la propuesta por parte de los expertos seleccionados, lo que se corroboró con el procesamiento estadístico al obtenerse las siguientes categorías para cada una de las indicaciones metodológicas, a partir de la determinación de los puntos de corte que se señalan en el Anexo # 14:

Indicaciones metodológicas	Categorías	Indicaciones metodológicas	Categorías
1	Muy Adecuada	5.8	Bastante Adecuada
2	Muy Adecuada	5.9	Muy Adecuada
3.1	Muy Adecuada	5.10	Muy Adecuada
3.2	Muy Adecuada	5.11	Muy Adecuada
3.3	Muy Adecuada	5.12	Muy Adecuada
3.4	Muy Adecuada	5.13	Muy Adecuada
3.5	Muy Adecuada	5.14	Muy Adecuada
3.6	Muy Adecuada	5.15	Muy Adecuada
3.7	Bastante Adecuada	5.16	Muy Adecuada
3.8	Muy Adecuada	5.17	Muy Adecuada
3.9	Muy Adecuada	5.18	Muy Adecuada
3.10	Muy Adecuada	5.19	Muy Adecuada
3.11	Muy Adecuada	5.20	Muy Adecuada
4	Muy Adecuada	5.21	Muy Adecuada
5.1	Muy Adecuada	5.22	Muy Adecuada
5.2	Muy Adecuada	6.1	Muy Adecuada
5.3	Muy Adecuada	6.2	Muy Adecuada
5.4	Muy Adecuada	6.3	Muy Adecuada
5.5	Muy Adecuada	7.1	Muy Adecuada
5.6	Muy Adecuada	7.2	Muy Adecuada
5.7	Muy Adecuada	8	Muy Adecuada

En cuanto a las recomendaciones planteadas por los expertos se pueden destacar:

- No indicar en la propuesta el algoritmo que se utiliza para representar gráficamente utilizando el paquete informático.
- Realizar alguna valoración acerca de las peculiaridades del trabajo con la computadora que se pueden emplear en función de propiciar un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador.



- Ejemplificar. en la medida de lo posible, algunas de las indicaciones que conforman la propuesta metodológica.

Todas estas observaciones y recomendaciones han resultado de mucha utilidad para el autor de esta tesis, quien la tuvo en cuenta para perfeccionar la propuesta metodológica.

### **Conclusiones del Capítulo:**

La propuesta metodológica presentada en esta tesis propicia la realización de cambios en la metodología de la enseñanza de las funciones matemáticas, entre los que se destacan:

- El análisis de las propiedades de las funciones a partir del gráfico y no como sucedía anteriormente cuando se utilizaban algunas propiedades para poder construir el gráfico.
- El análisis del dominio, imagen, ceros y otras propiedades, apoyándose en las facilidades que brindan los asistentes, utilizando recursos como el modo de trazado y ampliaciones de las escalas de los ejes coordenados. La utilización de estos recursos conduce al logro de una ganancia en la comprensión del acotamiento o no del dominio y la imagen de determinadas funciones.
- Al realizar el cálculo de límites, derivadas, integrales y resolver ecuaciones diferenciales utilizando los asistentes matemáticos se produce un ahorro de tiempo considerable, lo que permite una profundización en el análisis de los aspectos teóricos, de las relaciones entre los conceptos, de las diferentes vías de solución de los ejercicios y problemas y se puede realizar un trabajo más profundo en función del desarrollo de la metacognición.
- La simulación de procesos de aproximación o acercamiento como el límite de una función en un punto, límites laterales, interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto, difíciles de ilustrar en la práctica, reforzándose la noción de movimiento, de cambio.
- Una mejor utilización de la heurística a partir del trabajo de búsqueda de información en el medio informático, tanto en el proceso de orientación

para la búsqueda como en el procesamiento y debate de los resultados.

- Se facilita el trabajo de análisis de las características comunes y esenciales en la elaboración de conceptos. En un tiempo menor se puede analizar una mayor cantidad de objetos en condiciones muy difíciles de lograr sin el medio informático.
- Se amplían las posibilidades de búsqueda de ideas para elaborar y demostrar teoremas.
- Se sobredimensiona el trabajo de formulación y resolución de problemas, favoreciendo el estudio de una Matemática más cercana a la realidad de los/las estudiantes.

La propuesta metodológica para la utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones matemáticas que se ha expuesto en este capítulo satisface las exigencias que propician un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador, pues se garantiza:

- El aprendizaje individual; el respeto a la individualidad.
- El aprendizaje colaborativo, contribuyendo a que los estudiantes más aventajados influyan favorablemente en el aprendizaje de los estudiantes de menor rendimiento académico.
- El debate como vía fundamental de contribución a la metacognición, a la cooperación en la búsqueda de soluciones a los problemas que se presentan.
- La participación activa de los estudiantes en la construcción y organización del conocimiento.
- La unidad de los aspectos cognitivos y afectivos a través de un aprendizaje racional y afectivo-vivencial. La interacción de los estudiantes con el medio informático y entre ellos elimina la posibilidad de desarrollo del individualismo, de divorcio con el medio que los rodea, que se produce en algunas de las formas de utilización de la computadora, cuestión que ha sido muy criticada por los especialistas

- El crecimiento continuo de la independencia de los estudiantes, favoreciendo la autoeducación a mediano plazo.
- El cumplimiento de los pilares del aprendizaje del siglo XXI, definidos por la UNESCO: aprender a conocer, a hacer, a convivir, y a ser.

De esta manera no sólo se contribuye al desarrollo integral de la personalidad de los/las estudiantes, sino que se contribuye especialmente al desarrollo del pensamiento funcional de los/las mismos/as, resolviéndose así uno de los problemas fundamentales de la Matemática.

La rigurosa selección de los expertos, la profesionalidad con la que evaluaron cada indicación de la propuesta metodológica y realizaron observaciones y sugerencias, así como la exactitud con la que se realizó el procesamiento estadístico, garantizaron la correcta aplicación del método de expertos Delphy. Se cumple de esta manera el objetivo de este capítulo de valorar la propuesta metodológica aplicando el citado método de expertos.

## **CONCLUSIONES**

Los resultados alcanzados en la investigación permitieron elaborar una propuesta metodológica para la enseñanza de las funciones matemáticas utilizando las tecnologías informáticas y de las comunicaciones.

Se logró así una sistematización de la teoría relativa al proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones matemáticas, la cual sirve de referente teórico para la elaboración de una posible propuesta metodológica para la utilización de la Informática en la enseñanza de la Matemática, de forma general.

Como resultado de la investigación se elaboró una propuesta metodológica para la enseñanza de las funciones lineales utilizando el asistente matemático DERIVE, con el objetivo de contribuir al desarrollo del pensamiento funcional matemático de los/las estudiantes, que contiene una colección de ejercicios de aplicación que propician el estudio de una Matemática más cercana a su realidad.

La experiencia de constatación llevada a cabo permitió arribar a conclusiones acerca de la contribución que se realiza al desarrollo del pensamiento funcional matemático a través de la enseñanza de las funciones matemáticas utilizando las tecnologías informáticas.

Se elaboró un sistema de indicadores para medir el desarrollo del pensamiento funcional matemático de los/las estudiantes, que fue sometido al criterio de expertos, con resultados muy positivos.

Un elemento significativo de la propuesta metodológica lo constituye la utilización de mapas conceptuales con el objetivo de destacar los nexos existentes entre los diferentes conceptos del tema, realizándose una

contribución al proceso de formación y desarrollo del pensamiento funcional de los/las estudiantes.

La introducción del medio informático en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones matemáticas propició la realización de cambios en el resto de sus componentes, particularmente en los objetivos y en los métodos y procedimientos.

La propuesta metodológica presentada en esta tesis implica la realización de cambios significativos en la metodología de la enseñanza de las funciones matemáticas.

El diseño de utilización de la Informática que se utilizó en la tesis garantiza el cumplimiento de los principios del proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador.

De esta manera se han aprovechado las bondades que brinda un medio en el que se integran sonido, video, imágenes, textos y la posibilidad de interacción, para la mejor comprensión de los contenidos, de simulación de procesos difíciles de observar directamente en la práctica, para lograr un proceso de enseñanza–aprendizaje desarrollador de las funciones matemáticas, dándosele respuesta al problema planteado y cumplimiento al objetivo de esta tesis.

## RECOMENDACIONES

- La comisión de Carrera de Matemática-Computación pudiera valorar los resultados de esta tesis con el objetivo de tomar los elementos más significativos de la propuesta metodológica para utilizarlos en otros temas de las diferentes disciplinas, a partir del empleo de asistentes matemáticos que se encuentran a disposición de los profesores y estudiantes en el Instituto Superior Pedagógico.
- Se debe continuar la investigación para llegar a caracterizar el proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de la Matemática a partir de la mediación del medio informático. De hecho, algunas de las modificaciones que se producen en la metodología de la enseñanza de las funciones pueden ser generalizadas directamente.
- Los Institutos Superiores Pedagógicos pudieran concebir en sus planes de superación el entrenamiento de los profesores de la Enseñanza Media en el empleo de estos asistentes matemáticos, pues la causa principal de su poca utilización es el desconocimiento casi generalizado que existe sobre los mismos.

## BIBLIOGRAFÍA:

1. Adell, Jesús: "Educación en la Internet", *Universitas Tarraconensis*, serie IV, Extraordinari XX Setmana Pedagógica: 207-214, Palma de Mallorca, 1995, ISSN 0211-3368
2. Adell, Jesús: "La navegación hipertextual en el World-Wide Web: implicaciones para el diseño de materiales educativos", Comunicación presentada a EDUTEC'95, II Congreso de Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación para la Educación, Universitat de les Illes Balears, Palma de Mallorca, 1995.
3. Adell, Jesús: "Tendencias en educación en la sociedad de las tecnologías de la información", *EDUTEC Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, nº 7, 1997,
4. Aguilar, Marlene y Eugenio Díaz: "¿Nuevas tecnologías?. ¡Ciudadano!. Nuevos problemas en el aula", en *Publicación de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación educativa*, 443, México, 1995, ISBN 968-29-8134-4
5. Ahern, T.C. y J. Repman: "The effects of technology on online education", *Journal of Research on Computing in Education*, 26(4), 537-546, 1994.
6. Aleksandrov, A.D.: *La Matemática; su contenido, métodos y significado*, Ediciones Castilla, Madrid, 1973.
7. Alemán de Sánchez, Ángela: "La enseñanza de la Matemática asistida por computadora", Panamá, 2001.
8. Almeyda, Bernardino y otros: *Metodología de la enseñanza de la Matemática*, t. II, México, 1995.
9. Alonso, C: "Los recursos informáticos y los contextos de enseñanza y aprendizaje", En Sancho, J. M. (Coord.): *Para una tecnología educativa*, Horsori, Barcelona, 1994.
10. Álvarez de Zayas, Carlos: *Hacia una escuela de excelencia*, Editorial Academia, La Habana, 1996.
11. Amey, David: *Differential Equations with DERIVE*, MathWare, ISBN 0-9623629-3-X, USA, 1993.
12. Amey, David: *Exploring Calculus with DERIVE*, Addison-Wesley Publishing Company, Route 128, Reading, MA, 01867, USA, 1992, ISBN 0-201-52839-8.
13. Aoki, K., R. Fasse, y S. Stowe: "A typology for Distance Education – Tool for strategic planning", *Proceedings of ED-MEDIA & ED-TELECOM 98*, 149-154, 1998, Germany.

14. Apple Computer. *Education and the challenge of technology, teaching in the information age*, Verano, 1986.
15. Araújo, J. B. y C. B. Chadwick: *Tecnología educacional. Teorías de la instrucción*, Paidós, Barcelona, 1988.
16. Aste, Margarita: "Normas para incorporar la tecnología educativa en las escuelas", <http://WWW.mpsnet.com.mx/quipus/r16norma.htm>, 2002.
17. Ausubel, D. P., J. D. Novak y H. Hanesian: *Psicología cognitiva. Un punto de vista cognoscitivo*, Mexico, Trillas, 1989.
18. Ávila, Francisco y Yanira Rodríguez: "Sociedad de la información, sociedad dislocada", *I Jornada de la Investigación educativa*, UNERMB, Venezuela, 2001.
19. Ávila, Francisco: "La educación en la sociedad de la información", monografías.com, 2001.
20. Ávila, Ramiro: "El papel de las representaciones en el proceso de formación de los conceptos de función y función derivada: un proyecto de investigación", *Publicación de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación educativa*, 35-40, México, 1995, ISBN 968-29-8134-4
21. Ayersman, D.: "Reviewing the research on hypermedia-based learning", *Journal of Research on Computing in Education*, 28(4), 500-525, 1996.
22. Bacallao, Jorge: *Manual de investigación educacional*, Centro Nacional de Perfeccionamiento Médico, La Habana, 1999.
23. Balderas, Patricia: "Calculadoras avanzadas en el aprendizaje de la derivada y sus aplicaciones en el nivel medio superior", *Publicación de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación educativa*, 225-230, México, 1995, ISBN 968-29-8134-4
24. Ballester, Sergio: *Enseñanza de la Matemática y dinámica de grupo*, PROMET, Ciudad de la Habana, 1995.
25. Ballester, Sergio: *La sistematización de los conocimientos matemáticos*, PROMET, Editorial Academia, Ciudad de la Habana, 1995.
26. Barrera, Fernando y Luis Manuel Santos: "Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamento", CINVESTAV-IPN, México, 2000.
27. Bartolomé, A.: "Sistemas Multimedia en Educación", *Nuevas tecnologías, comunicación audiovisual y educación*, Cedecs, Barcelona, 1998.
28. Bartolomé, A.: *Nuevas tecnologías y enseñanza*, Graó, Barcelona, 1994.



29. Bennett, F: "Computers as tutors: solving the crisis in Education", <http://WWW.concentric.net/~faben1>, 1996.
30. Berry, John S.; Edward Graham y Anthony Watkins: *Learning Mathematics Through DERIVE*, Ellis Horwood Limited, , Great Britain, 1993. ISBN 0-13-037532-2.
31. Binstead, D.: *Open and distance learning and the use of new technology for the self development of managers*, Centre for the Study of Management Learning, University of Lancaster, 1987
32. Birhm, Josef: "Teaching Mathematics with *DERIVE*" , *Proceedings of the International School on the Didactics of Computer Algebra*, April 27-30, Austria, 1992.
33. Blanco, Lázaro: "Hiperuniversidad: nueva alternativa educativa", *GIGA: La revista cubana de Computación*, Colombus conectividad, 3, 48-51, Ciudad de la Habana, 1999, ISBN 1028-270x
34. Botkin, Elmandura y Malitza: *Aprender, horizonte sin límites*, Santillana, Madrid, 1979.
35. Broman, Per: "La enseñanza y el aprendizaje de la Matemáticas para el futuro", Conferencia en el 8vo Congreso Internacional de Educación Matemática, Sevilla, 1996.
36. Brumbaugh, Douglas K.: "Enseñar a los niños para su futuro, no para nuestro pasado", Conferencia en el 8vo Congreso Internacional de Educación Matemática, Sevilla, 1996
37. Byard, M. J.: "IT under school-based policies for Initial Teacher Training", *Journal of Computer Assisted Learning*, 11, 128-140, 1995.
38. Campistrous, Luis y Celia Rizo: *Indicadores e investigación educativa*, Ciudad de la Habana, 1998.
39. Campistrous, Luis y Celia Rizo: *Tecnología, resolución de problemas y Didáctica de la Matemática*, ICCP, Cuba, 2000.
40. Cantoral, Ricardo y otros: *Desarrollo del pensamiento matemático*, Trillas, México, 2000.
41. Cantoral, Ricardo: "Pensamiento y lenguaje variacional", *Cuadernos del Seminario de Investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa*, Cinvestav, México, 1997.
42. Carrillo, A. e Iván Llamas: *DERIVE. Aplicaciones matemáticas para PC*, RA-MA, Madrid, 1994.
43. Castellanos, Doris y otros: *Aprender y enseñar en la escuela: una concepción desarrolladora*, Ciudad de la Habana, 2002.
44. Castellanos, Doris y otros: *El proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador en la Secundaria Básica*. Centro de Estudios Educativos. I.S.P. "E. J. Varona".Ciudad de la Habana, 2001.

45. Castellanos, Doris y otros: *Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador*, Centro de Estudios Educativos. I.S.P. "E. J. Varona". Ciudad de la Habana, 2000.
46. Castro, Fidel: "Discurso en el acto de inauguración de las 101 escuelas reconstruidas en la capital", *Granma*, Ciudad de la Habana, 2001.
47. Castro, Iván. *Como hacer Matemáticas con DERIVE*, Reverté Colombiana, S.A., 1992
48. Cebrián, Manuel: *La didáctica, el curriculum, los medios y los recursos didácticos*, Secretariado de publicaciones de la Universidad de Málaga, 1992.
49. Cerf, V.: "How the Internet came to be", Addison-Wesley, November 1993, ISBN 0-201-62214-9.
50. Cevallos, Guadalupe: "Multimedia, todo lo que sus sentidos pueden captar", *RED*, Año 11, Número 25, 1995.
51. Chaupart, Jean Michel: "Teleconferencias y nuevas tecnologías en educación", *Nuevas tecnologías aplicadas a la Educación Superior*, # 6, ICFES. ARTE Y FOTOLITO "ARFO" LTDA., Santafé de Bogotá, 1995, ISBN: 958-9279-20-1
52. Chávez, Justo: *Actualidad de las tendencias educativas*, Pedagogía 2001, Ciudad de la Habana, 2001.
53. Colectivo de autores CEE. ISPEJV: *Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador*, Edición Mora Carnet, La Habana, 2001.
54. Colectivo de autores del I.S.P. "José Antonio Echeverría". *Proyecto de investigación: Perfeccionamiento de la disciplina Matemática en una carrera de Ciencias Técnicas para el uso de la informática en el proceso de enseñanza-aprendizaje*, Ciudad de la Habana, 2002.
55. Colectivo de autores: "Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo". *EMAT*, México, 2000, ISBN 970-18-5150-1.
56. Colectivo de autores: *Macromedia Authorware Version 3, Taking the Plunge*, Macromedia, Inc., 1995.
57. Collis, B: "The Internet as an Educational innovation: lessons from experience with computer implementation", *Educational Technology*, 34(12), 21-30, 1996.
58. Colom, A, Jesús Salinas, y J. Sureda: *Tecnología y medios educativos*, Cincel-kapelusz, Madrid, 1988
59. Comisión Europea: *Libro Blanco sobre la educación y la formación. Enseñar y aprender. Hacia la sociedad del conocimiento*, Oficina de Publicaciones Oficiales de las Comunidades Europeas, Luxemburgo, 1995.
60. Conferencia de Rectores de Universidades Españolas: "Las tecnologías de la información y las comunicaciones en las

- Universidades Españolas”, Informe del Grupo de Nuevas tecnologías de la Información y las Comunicaciones, CRUE, 1997.
61. Contijoch, Teresa: "Docencia universitaria con herramientas telemáticas: una perspectiva discente", *Jornadas Multimedia Educativo*, Barcelona, 4 al 7 de julio de 1999.
  62. Contreras, Ricardo y María Guadalupe Grijalva: "Sistema multimedia como prototipo de la universidad virtual", *Nuevas tecnologías aplicadas a la Educación Superior*, # 7, ICFES. ARTE Y FOTOLITO "ARFO" LTDA., Santafe de Bogotá, 1995, ISBN: 958-9279-20-X
  63. Cordero, Francisco: "El pensamiento de la matemática avanzada en el aprendizaje cooperativo. Algunas argumentaciones del cálculo", *Publicación de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación educativa*, 15-20, México, 1995, ISBN 968-29-8134-4
  64. Cordero, Francisco: "Elementos didácticos de la Matemática Avanzada: la variación y un modelo de comportamiento ante situaciones del cálculo", Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México, 1993.
  65. Cordero, Francisco: "Entendimiento de los conceptos del Análisis y del Cálculo", *Actas de la undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, 38-41, México, 1997.
  66. Córdova, Armando: *Algunos aspectos filosóficos, teóricos y prácticos de la Psiquiatría*, Editorial Científico-técnica, La Habana, 1979.
  67. Cornella, A.: *Los recursos de información: ventaja competitiva de las empresas*, McGraw-Hill-ESADE, Barcelona, 1994.
  68. Corominas, A.: *La comunicación audiovisual y su integración en el curriculum*, Graó, Barcelona, 1994.
  69. Cruz, Nereyda y Paúl Torres: "Algunas consideraciones acerca de la labor investigativa", I.S.P."E. J. Varona". Ciudad de la Habana, 1999.
  70. Cuevas, Carlos Armando y José Luis Díaz: "Propuesta para el diseño de sistemas tutoriales inteligentes como una forma para introducir el concepto de función vía la microcomputadora", *Memorias del IV Taller Internacional sobre la enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura*. ISPJAE, Ciudad Habana, Cuba
  71. Cuevas, José: "Modelación de problemas, estrategias en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales con el uso de DERIVE", *Memorias del IV Taller Internacional sobre la enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura*. ISPJAE, Ciudad Habana, Cuba.
  72. Davies, R.: "Computer-supported cooperative learning: interactive group technologies and distance learning systems", *Mind weave: Computers, communication, and distance education*, Pergamon, 228-231, New York, 1989.

73. De Castillo, Guadalupe y Jorge E. Hernández: "Un estudio sobre el uso del concepto de función entre estudiantes universitarios de Ciencias Naturales. Universidad de Panamá", *Publicación de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación educativa*, 65-69, México, 1995, ISBN 968-29-8134-4.
74. De Lange, J.: "Assessment: no change without problems", *Reform in School Mathematics and authentic assessment*, SUNY Press, 87-172, New York, 1995.
75. December, J.: "Units of analysis for Internet communication", *Journal of Communication*, 46(1), Winter, 1996.
76. December, J.: "Transitions in studying computer-mediated communication", *Computer-Mediated Communication Magazine*, 2(1), January 1, 1995.
77. Delgado, Mayra: *Tesis presentada en opción al Título de Master en Informática Educativa*, Ciudad de la Habana, 2002.
78. De Marois, Phil: *College Algebra Laboratories Using DERIVE*, MathWare, USA, 1992.
79. Denton, Brian H.: *Learning Linear Algebra Through DERIVE*, Ellis Horwood Limited, Great Britain, 1994, ISBN 0-13-122664-9.
80. Dolores, Crisólogo: "El desarrollo de ideas variacionales y la derivada en situación escolar", *Actas de la undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6-10, México, 1997.
81. Dolores, Crisólogo: *Una propuesta didáctica alternativa para la enseñanza de la derivada en el bachillerato*, Tesis en opción al grado de Doctor en Ciencias Pedagógicas, Ciudad de la Habana, 1995.
82. Duarte, Víctor: *Modellus 2.01. Manual*, Faculdade de Ciencia e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2000.
83. Duarte, Víctor: *Modellus. Interactive modelling with Mathematics. Version 2.01*. New University of Lisboa, Lisboa, 2000.
84. Dubinsky, Ed: "Reflective abstraction in advanced mathematical thinking", *Advanced mathematical thinking*, 95-123, Dordrecht, 1991.
85. Duderstadt, J.: "The future of the University in an age of knowledge". *Journal of Asynchronous Learning Networks*, (2):1, 1997
86. Ellsworth, J.: *Education on the Internet*. SAMS Publishing, Indianapolis, 1995.
87. Engels, Federico: *Anti-Dühring*, Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, 1979.
88. Escamez, J. y F. Martínez: "Actitudes de los agentes educativos ante la informática", *Educación para el siglo XXI*, Fundesco, Madrid, 1987.
89. Escudero, J. M.: "La integración escolar de las nuevas Tecnologías de la Información", *Temps d'Educació*, 9 1r. semestre, 1993.

90. Fernández, Berta: "Los medios de enseñanza en la tecnología educativa", curso del Congreso Pedagogía 97, Ciudad de la Habana, 1997.
91. Fernández, Marta e Iván Valido: "Programas DERIVE para el empleo en la docencia", *Memorias del IV Taller Internacional sobre la enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura*. ISPJAE, Ciudad Habana, Cuba
92. Fiallo, Jorge y otros: *Física, octavo grado*, Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, 2001.
93. Flores Ramón: "Un estudio exploratorio sobre el pensamiento variacional avanzado en contexto", *Actas de la undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, 78-82, México, 1997.
94. Flórez, Armando: *Panorámica del desarrollo histórico del cálculo*, México, 1995.
95. Forneiro, Rolando, Victoria Arencibia y René Hernández: "Las tecnologías de la Información y la Comunicación en la formación inicial y continua de los profesionales de la Educación. Retos", Ciudad de la Habana, 2002.
96. Foster, J.: "Netskills: Traditional and networked based methods for training users and providers of networked information resources", *Proceedings of the 7th. Joint European Networking Conference*, 271-1 a 271-5. Budapest, 1996.
97. Freedman, Alfred: *Tratado de Psiquiatría*, t.1, Edición Revolucionaria, Ciudad de la Habana, 1982.
98. Galvis-Hernán, Álvaro: "La educación y el rol de la tecnología", Bogotá, 2001
99. García, Alfonsa: "Prácticas de Matemáticas con *DERIVE*", Distribuidora A.G.L.I., S.L., c/ Islas Marshall, 1, 28035-Madrid, Madrid, 1994, ISBN 84-368-0759-6.
100. García, Julia: *Folleto de Didáctica*. Ciencias de la Educación. I.S.P."E.J.Varona", 2000.
101. GET – Grupo de Educación y Telemática: "Informe Final Proyecto CICYT: Formación Presencial Virtual y a Distancia basada en Aplicaciones Telemáticas", 1998.
102. Gilligan, Lawrence G. y James F Marquardt: *Calculus and the DERIVE Program*, Second Edition, Gilmar Publishing Company, , USA, 1990, ISBN 0-9626661-2-2.
103. Gisbert, M., J. Adell, y R. Rallo: "Training teachers with hypertext using HTML and Internet tools as didactic resources". Presentada en The Annual Meeting of the Internet Society, INET'96. The Internet: Transforming our Society Now, Montreal, 1996.

104. Glynn, Jerry: *Exploring Math from Algebra to Calculus with DERIVE , A Mathematical Assistant*, MathWare, ISBN 0-9623629-0-5, USA, 1989.
105. González, Alfonso y Otros: Fundamentos de Optimización matemática para la economía y la empresa con DERIVE y Matemática en un entorno Windows, Editorial RA-MA, Madrid, 1997, ISBN: 84-7897-259-5.
106. González, Alfonso: Matemáticas con *DERIVE* en la economía y en la empresa, RA-MA, , Madrid, 1995, ISBN 84-7897-201-3.
107. González, América: *Prycrea. Pensamiento reflexivo y creatividad*. Editorial Academia, La Habana, 1995.
108. González, Ana María, Silvia Recarey y Fátima Addine: "Capítulo 4: El proceso de enseñanza aprendizaje: un reto para el cambio educativo", *Aprender es crecer*, Ciudad de la Habana, 2002.
109. González, Ana María, Silvia Recarey y Fátima Addine: "Capítulo 5: La dinámica del proceso de enseñanza aprendizaje mediante sus componentes", *Aprender es crecer*, Ciudad de la Habana, 2002<sup>a</sup>.
110. González, Ana María: *Folleto de Didáctica*. El aprendizaje, La Habana, 2000.
111. González, Vicente: *Teoría y Práctica de los Medios de Enseñanza*, Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, 1986.
112. González, Viviana y otros: *Psicología para educadores*, Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, 1995.
113. Gray, E.M. y David Tall, "Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple Arithmetic". *Journal for Research in Mathematics Education* 26, 115-141, 1994.
114. Gregor, S.D. y E.F. Cuskelly: "Computer mediated communication in distance education", *Journal of Computer Assisted Learning*, 10, 168-181. 1994.
115. Gros, B.: *Diseños y programas educativos*, Ariel, Barcelona, 1997.
116. Gutiérrez, Melitina: *Conferencias sobre problemas filosóficos de la Matemática*, Ciudad de la Habana, 1984.
117. Guzmán, Miguel de y Rubio, B.: *Análisis Matemático - 3 - Sucesiones y series de funciones, números complejos, DERIVE, aplicaciones*, Ediciones Pirámide, S.A., Madrid, 1997, ISBN 84-368-0759-6.
118. Guzmán, Miguel de: "El papel del matemático en la educación matemática", *Actas del 8vo Congreso Internacional de Educación Matemática*, 47-63, Sevilla, 1996.
119. Harasim, L.: "Learning networks: a field guide to teaching and learning online", 1995.
120. Harper, David; Chris Wooff y David Hodgkinson: *A Guide To Computer Algebra Systems*, John Wiley & Sons Ltd., England, 1991, ISBN 0471-92910-7.

121. Hernández, Herminia: "Vigotski y la estructuración del conocimiento matemático. Experiencia cubana"; Conferencia Magistral RELME 11, México, 1997.
122. Hiltz, R.: "Teaching in a Virtual Classroom", *International Conference on Computer Assisted Instruction ICCAI'95*, Universidad de Taiwán, 1995.
123. Hiltz, S.: "The Virtual Classroom: Software for Collaborative Learning", *Sociomedia*, The MIT Press, Massachusetts, 1992
124. Hunter, M., J.D Monaghan y T Rupert: "The effect of computer algebra use on students' algebraic thinking", *Working Papers for ESRC Algebra Seminar*, London, 1993.
125. Ibáñez, Miriam y otros: "Apuntes sobre Historia de la Matemática". Departamento de Matemática-Computación, I.S.P."E.J.Varona, 2000.
126. ICCP-MINED: "Las categorías fundamentales de la Pedagogía como ciencia. Sus relaciones mutuas", Impresión ligera, Ciudad de La Habana, 1998.
127. ICCP-MINED: *Pedagogía*, Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana, 1981.
128. Jiménez, Héctor: *Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas*, Ciudad de la Habana, 2001.
129. Johnson, Jerry: *Linear Algebra with DERIVE*, John Wiley and Sons, , New York, 1994, ISBN 0-471-59194-7.
130. Jungk, Werner: *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 2*, primera parte, Editorial de libros para la Educación, Ciudad de la Habana, 1979.
131. Jungk, Werner: *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 2*, segunda parte, Editorial de libros para la Educación, Ciudad de la Habana, 1981.
132. Jungk, Werner: *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 1*, Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, 1981.
133. Kaput, J.J.: "Technology and Mathematics Education", *Handbook on research in mathematics teaching and learning*, 515-556, Macmillan New York, 1992.
134. Kieran, Carolyn: "La cara cambiante del álgebra escolar", Conferencia en el 8vo Congreso Internacional de Educación Matemática, Sevilla, 1996.
135. Kleiner, I: "Evolution of the function concept: a brief survey", *The college Mathematics Journal*, 20, 280-300, 1989.
136. Klingberg. L: *Introducción a la Didáctica General*, Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana, 1985.
137. Kumar, V.: *Interactive Multimedia on the Internet*, Indianapolis, 1995.

138. Kutzler, Bernhard: *Introduction to Derive for Windows*, Austria, 1996.
139. Labarrere, Alberto: *Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos*, Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, 1996.
140. Labarrere, Guillermina y otros: *Pedagogía*, Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana, 1998.
141. Laborderie, R.: *Aspects de la communication educative*, Casterman, Tournai, 1979.
142. Landauer, T.: "Education in a World of Omnipotent and Omniscient Technology", *Technology in Education: Looking toward 2020*, Lawrence Erlbaum Ass., New Jersey, 1988.
143. Lefranc, R.: *Las técnicas audiovisuales al servicio de la enseñanza*, El Ateneo, Buenos Aires, 1973.
144. Leontiev, Alexei: *El pensamiento. Psicología para maestros*, Instituto Cubano del libro, Ciudad de la Habana, 1975.
145. Lima, Sylvia, Mercedes Silverio y Esperanza Herrera: "La formación de profesores en la modalidad de educación a distancia en el Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", Centro de Estudios Educativos del Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", Ciudad de la Habana, 2002.
146. List, G. y otros: *Lógica matemática, teoría de conjuntos y dominios numéricos*, Editorial de libros para la Educación, Ciudad de la Habana, 1982.
147. Llorens, José Luis: *Aplicaciones de DERIVE: Álgebra Lineal (Fundamentos)*, Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1994, ISBN 84-7721-255-4.
148. Llorens, José Luis: *Aplicaciones de DERIVE: Análisis Matemático-I (Cálculo)*, Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1993, ISBN 84-7721-237-6.
149. Llorens, José Luis: *Exámenes con DERIVE*, Distribuido por DERISOFT, Valencia, 1997, ISBN 84-921694-0-0.
150. Llorens, José Luis: *Introducción al uso de DERIVE . Aplicaciones al Álgebra y al Cálculo*, Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1995, ISBN 84-7721-199-X.
151. Lupiáñez, José Luis y Luis E. Moreno: "Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las Matemáticas", CINVESTAV-IPN, México, 2001.
152. Maldonado, Luis F.: "Relación de Hipertextos Educativos", *Nuevas tecnologías aplicadas a la Educación Superior*, # 5, ICFES. ARTE Y FOTOLITO "ARFO" LTDA., Santafe de Bogotá, 1995, ISBN: 958-9279-23-6.
153. Mallas, S.: *Medios audiovisuales y pedagogía activa*, CEAC, Barcelona, 1979.



154. Martí, E.: *Aprender con ordenadores en la escuela*, ICE-Horsori, Barcelona, 1992.
155. Martínez, Armando: "Graficar como un medio y no como un objetivo: el impacto de las calculadoras gráficas en precálculo y cálculo", *Publicación de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación educativa*, 119-123, México, 1995, ISBN 968-29-8134-4.
156. Martínez, F.: "A dónde van los medios", *Medios audiovisuales y nuevas tecnologías para el s:XXI*, Ed. Murcia, 1999.
157. Martínez, F.: "Investigación y nuevas tecnologías de la comunicación en la enseñanza: el futuro inmediato". *Pixel-Bit. Revista de medios y educación*, 2, 3-17, 1994.
158. Martínez, M. Ángeles: "Problemas y Prácticas de Álgebra", Departamento de Publicaciones de la Escuela Universitaria de Informática, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, 1993, ISBN 84-87238-23-8.
159. Martínez, María A. y N. Saulea: "Informática: usos didácticos convencionales", *Tecnología educativa. Nuevas Tecnologías aplicadas a la educación*, Alcoy, Marfil, 1995.
160. Marx, Carlos. *Manuscritos Matemáticos*, Ciencia, Moscú, 1968.
161. Mason, R. y T. Kaye: "Toward a new paradigm for distance education", *Online Education: Perspectives of a New Environment*, 15-38, New York, 1990.
162. Masterman, L.: *La enseñanza de los medios de comunicación*, De la Torre, Madrid, 1993.
163. Matías, Cosme: *Tesis en opción al grado académico de Master en Didáctica de la Matemática*, Ciudad de la Habana, 2000.
164. Meléndez, Alfonso: "Informática y software educativo", *Nuevas tecnologías aplicadas a la Educación Superior*, # 2, ICFES. ARTE Y FOTOLITO "ARFO" LTDA, Santafe de Bogotá, 1995, ISBN: 958-9279-22-8.
165. Mercer, N. y E. Fisher: "How do teachers help children to learn? An analysis of teacher's interventions in computer-based activities", *Learning and Instruction*, t. 2, 339-355, 1992.
166. MES: *Programa para el desarrollo de la computación en la Educación Superior*, La Habana, 1987.
167. Miñano, Rafael: "¿Cómo lo hago con DERIVE? Guía para empezar a usar DERIVE", Departamento de Publicaciones de la Escuela Universitaria de Informática, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, 1993, ISBN 84-87238-20-3.
168. Moreno, Luis E. : "La nueva matemática experimental", CINVESTAV-IPN, México, 2001.

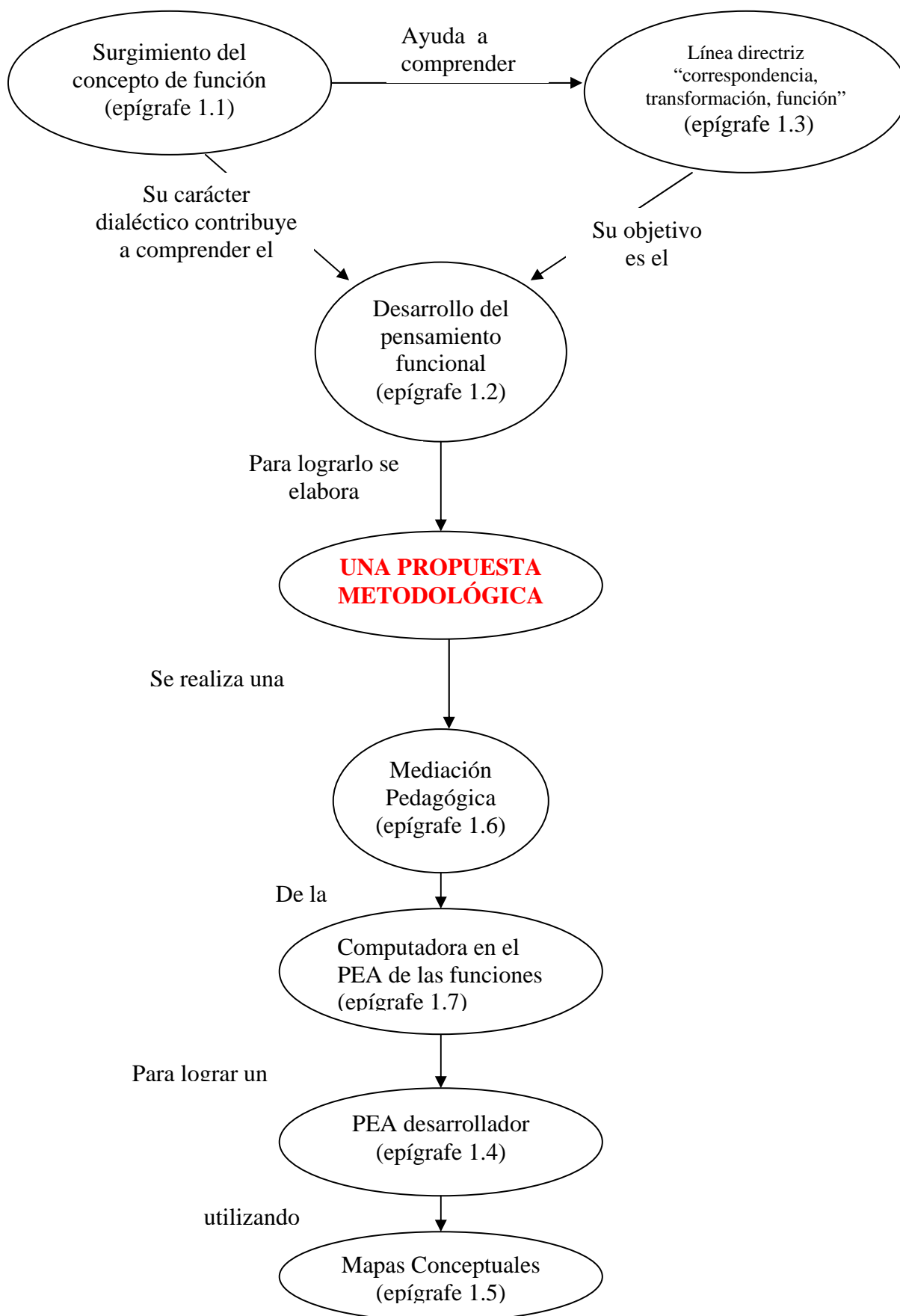
169. Moreno, Luis E. y Guillermina Waldegg: "La epistemología constructivista y la didáctica de las ciencias: ¿coincidencia o complementariedad?", CINVESTAV-IPN, México, 2000.
170. Moreno, Luis E. y Manuel Santos trigo: "Proceso de transformación del uso de tecnología en herramienta para solucionar problemas de Matemática por los estudiantes", CINVESTAV-IPN, México, 2001.
171. Morín, J. y R. Seurat: *Gestión de los Recursos Tecnológicos*, Cotec, Madrid, 1998.
172. Muñoz, Félix y otros: *Matemática, octavo grado*, Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, 1990.
173. Nápoles, J.E.: *De las Cavernas a los fractales*, Holguín, 1996
174. Orione, Julio: "Computadora en la escuela: una maravilla mal usada", [jorione@inf.clarin.com.ar](mailto:jorione@inf.clarin.com.ar), 2001.
175. Ortega, Ramón Abel y Oristela Cuellar: "Una experiencia en la utilización del paquete "DERIVE 5.0" como herramienta de trabajo en la evaluación de la Matemática para agrónomos", *Memorias del Evento Informática 2003*, Ciudad de la Habana, 2003.
176. Palmiter, J.R.; "Effects of computer algebra systems on concept and skill Acquisition in Calculus", *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 151-156, 1991.
177. Paper, Seymour: "Computer and computer cultures", RUN Computer Education, 1990.
178. Papert, S.: *Desafío de la mente. Computadoras y educación*, Galápago, Buenos Aires, 1987.
179. Papert, S.: *La máquina de los niños*, Barcelona, Paidós, 1995.
180. Paulsen, M.F.: *The online report on pedagogical techniques for computer-mediated communication*, NKI, Oslo, 1995.
181. Penagos, Julio César: "Educación y computadoras", <http://WWW.virtualia.com.mx/971202/articulos/educ.htm>, 2002.
182. Perelman, L.J.: *School's out: hyperlearning, the new technology, and the end of education*, William Morrow and Co., New York, 1992.
183. Pérez-Fernández, Javier: "Los manipuladores simbólicos en la enseñanza de la Matemática", Conferencia en el 8vo Congreso Internacional de Educación Matemática, Sevilla, 1996.
184. Pietzsch Günter y otros: *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 3*, Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, 1982.
185. Pisan, Francis: Conferencia: "Hipertexto y escritura electrónica", Alianza Colombo-Francesa, Santafé de Bogotá, 1994.
186. Poves, J. e I. Solís: "Integración de redes de docencia en las redes universitarias", *Enfoque*, 41 / 42, 1-9, REDIRIS, 1997.

187. Prieto, Daniel: "Mediación pedagógica y Nuevas tecnologías", *Nuevas tecnologías aplicadas a la Educación Superior*, # 1, ICFES. ARTE Y FOTOLITO "ARFO" LTDA, Santafé de Bogotá, 1995, ISBN: 958-9279-18-X.
188. Quintana, Ricardo: *La ciudad informacional. Tecnologías de la información, reestructuración económica y el proceso urbano-regional*, Alianza Editorial, Madrid, 1995.
189. Resnick, L.: *Education and learning to think*, Academy Press, Washington, 1988.
190. Ríbnikov, Konstantín: *Historia de la Matemática*, MIR, Moscú, 1987.
191. Riel, M. y L. Harasim: "Research perspective on network learning": *Machine Mediated learning*, 4 (2-3): 91-113, 1994.
192. Rincón, Omar: "Radio y Televisión en la Universidad", *Nuevas tecnologías aplicadas a la Educación Superior*, # 4, ICFES. ARTE Y FOTOLITO "ARFO" LTDA, Santafé de Bogotá, 1995, ISBN: 958-9279-19-8.
193. Ríos, José Manuel y Manuel Cebrián: *Nuevas tecnologías de la información y de la comunicación aplicadas a la educación*, Málaga, 2000.
194. Rodríguez, Armando y otros: *Geografía económica general y de Cuba*, Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, 1990.
195. Ronajo, Teresa y Luis Moreno: *Educación Matemática: investigación y tecnología en el nuevo siglo.*, CINVESTAV-IPN, México, 2000.
196. Rubinstein, S.L.: *El ser y la conciencia*, Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, 1979.
197. Rubio, Gregorio y Fernando Jiménez: *Introducción al DERIVE*, Departamento de Matemática Aplicada, E.T.S., Ingenieros Industriales de Valencia.
198. Sáenz, César: "Un modelo de evaluación de software educativo", 79-89, Universidad Autónoma de México, México, 1990.
199. Salazar, Diana: "Interdisciplinariedad como tendencia de la enseñanza de la Ciencia", Centro de Estudios Educativos del Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", Ciudad de la Habana, 2002.
200. Salgado, Adys: *Tesis presentada en opción al Título de Master en Informática*, Ciudad de la Habana, 2002.
201. Salinas, Jesús: "¿Qué se entiende por una institución de educación superior flexible?", Comunicación presentada a Edutec'99, Sevilla, 1999a, ISBN: 84-89673-79-9.
202. Salinas, Jesús: "Cambios en la comunicación, cambios en la educación", *Aspectos críticos de la reforma educativa*, Sevilla, 1995.

203. Salinas, Jesús: "Las redes: ordenadores y telecomunicaciones en la enseñanza secundaria", *Aula de Innovación Educativa*, (40-41): 10-14, 1995a.
204. Salinas, Jesús: "Mass-media y Educación Social", *COLOMA*, 252-276, Narcea, Madrid, 1987.
205. Salinas, Jesús: "Nuevos ambientes de aprendizaje para una sociedad de la información", *Pensamiento Educativo*, (20): 81-104, Chile, 1997.
206. Salinas, Jesús: "Redes y desarrollo profesional del docente: Entre el dato serendipiti y el foro de trabajo colaborativo", *Profesorado*, (1): 2, Granada, 1998b.
207. Salinas, Jesús: "Redes y Educación: Tendencias en educación flexible y a distancia", *Educación y tecnologías de la educación, II Congreso Internacional de Comunicación, tecnología y educación*, 141-151, Oviedo, 1998.
208. Salinas, Jesús: "Rol del profesorado universitario ante los cambios de la era digital", *Perfeccionamiento Integral del Profesor Universitario. Primer Encuentro Iberoamericano*, Caracas, 1999.
209. Sánchez, Carmen: "La relación didáctica profesor-estudiante en la enseñanza del concepto de límite de una función", *Actas de la undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, 59-63, México, 1997.
210. Sánchez, Carlos: *Análisis Matemático*, t.1, Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, 1982.
211. Sancho, J.M.: "Hacia una tecnología crítica", *Cuadernos de Pedagogía*, (230): 8-12, 1994b.
212. Sancho, J.M.: "Presentació. Monografia: Technologies de la informació a l'educació. Una perspectiva europea". *Temps d'Educació*, 9, 1993.
213. Sancho, J.M.: *La tecnología: un modo de transformar el mundo cargado de ambivalencia*, Horsori, Barcelona, 1994a.
214. Sandoval, Armando: *Matemática. Colección de ejercicios y problemas*, Ciudad de la Habana, 2002.
215. Santos trigo, Luis Manuel: "Un problema de variación", *CINVESTAV-IPN*, México, 2000.
216. Schank, Roger: *Engines for Education*, 1995.
217. Smirnov, A. A. y otros: *Psicología*, Imprenta Nacional de Cuba, Ciudad de la Habana, 1961.
218. Solís, Miguel: "El uso de las calculadoras en las situaciones de enseñanza del cálculo en las escuelas de ingeniería en México: la noción de función y su campo conceptual asociado", *Publicación de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación educativa*, 113-117, México, 1995, ISBN 968-29-8134-4.
219. Solomón, C.: *Entornos de aprendizaje con ordenadores*. Paidós-MEC, Barcelona, 1987.

220. Tall, David: "Information technology and mathematics education: enthusiasms, possibilities and realities", *Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education*, 65-82, Sevilla, 1996.
221. Tamayo, Mario: *Diccionario de la investigación Científica*, La Habana, 1984.
222. Tiffin, J. y L. Rajasingham: "En busca de la clase virtual. La educación en la sociedad de la información", *Temas de educación*, Paidós, Barcelona, 1997.
223. Torres, Paúl: "¿Vigotsky o Piaget, quien necesita la Matemática Educativa?", Cuba, 1999.
224. Trentin, G.: "Computer conferencing systems as seen by designer of online course", *Educational Technology*, 38(5), 36-43, 1998.
225. Twigg, Carol : "The changing Definition of learning", *Educom Review*, Julio-Agosto, 1994.
226. UNESCO: *Education and informatics Worldwide*, 1992.
227. UNESCO: *Proyecto general de educación para América Latina y el Caribe*, Pedagogía 2003, La Habana, 2003.
228. Urbina, Santos: *Informática y teorías del aprendizaje*, Universitat de les Illes Balears, 2001.
229. Valdés, Rolando: *Objetivos fundamentales y metodología de la utilización de las computadoras en la enseñanza de la Física. Consideraciones acerca de la formación y superación de profesores*, Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas, Ciudad de la Habana, 1996.
230. Vaughan, Tay: *Multimedia making it work*, Osborne Mc. Graw Hill, 1989.
231. Vázquez, Maritza: *Una propuesta para la Enseñanza de la Estadística*, Tesis presentada en opción al Título de Master en Informática Educativa, Cuba, 1998.
232. Vigotsky, Lev S.: *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, Crítica, Barcelona, 1979.
233. Vigotsky, Lev S.: *Pensamiento y lenguaje*. Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana, 1982.
234. Vilches, Amparo y Carlos Furió: *Ciencia, tecnología y sociedad: sus implicaciones en la educación científica del siglo XXI*, PROMET, Ciudad de la Habana, 1999.
235. Villagra, A.: *Enseñar y aprender con medios. Del eficientismo pedagógico a los modelos basados en los procesos*. Universidad Nacional de Tucumán. (Internet).
236. Villegas, Bayardo: "Funciones matemáticas en otras ciencias", Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Javeriana, Santa Fe de Bogotá, 2000.

- 237. Wussing, H: *Historia de la Matemática*, MIR, Moscú, 1990.
- 238. Youschkevich, A: "The concept of function up to the middle of 19th. Century", *Archive for History of Exact Sciences*, 16, 36-85, 1976.
- 239. Zilberstein, José y Margarita Oramas: "Reflexiones acerca de la inteligencia y la creatividad", *Aprender es crecer*, Ciudad de la Habana, 2002.
- 240. Zillmer, Wolfgang: *Complementos de metodología de la enseñanza de la Matemática*, Editorial de libros para la Educación, Ciudad de la Habana, 1981.

**Anexo # 1: Mapa sobre la estructura del capítulo I**

## **Anexo # 2: El Derive.**

Este asistente matemático aparece en 1998 como una ampliación del MUMATH (primer sistema de cálculo simbólico que se empleó en microprocesadores en los años 70, fue programado en LISP). También programado en LISP, es ejecutable sobre sistema operativo MS-DOS. Las primeras versiones necesitaban muy poca memoria y no era necesario el disco duro para su óptimo funcionamiento. Funciona correctamente en cualquier ordenador basado en un microprocesador "Intel 8086" u otros compatibles. Mediante este se pueden resolver operaciones con expresiones algebraicas y trigonométricas, calcula primitivas, integrales definidas, límites, derivadas ordinarias y parciales, extremos de funciones, desarrollos de Taylor, desarrollos de Fourier y transformaciones de Laplace.

Aborda temas como el cálculo diferencial, vectorial, polinomios ortogonales, Álgebra matricial, ecuaciones en diferencias finitas, estadística y representaciones gráficas de funciones de dos y tres variables.

Actualmente existen versiones para calculadoras gráficas. A finales de 1996 apareció en el mercado la versión 4.0 sobre Windows 95, que conserva en general la filosofía de trabajo de las versiones anteriores, adicionando todas las ventajas que el ambiente Windows proporciona, entre ellas un mejor funcionamiento gráfico en tercera dimensión, el cual se perfecciona con la aparición de la versión 5.02 del 16 de Mayo de 2000 y su versión al español distribuida el 15 de Septiembre de 2000.

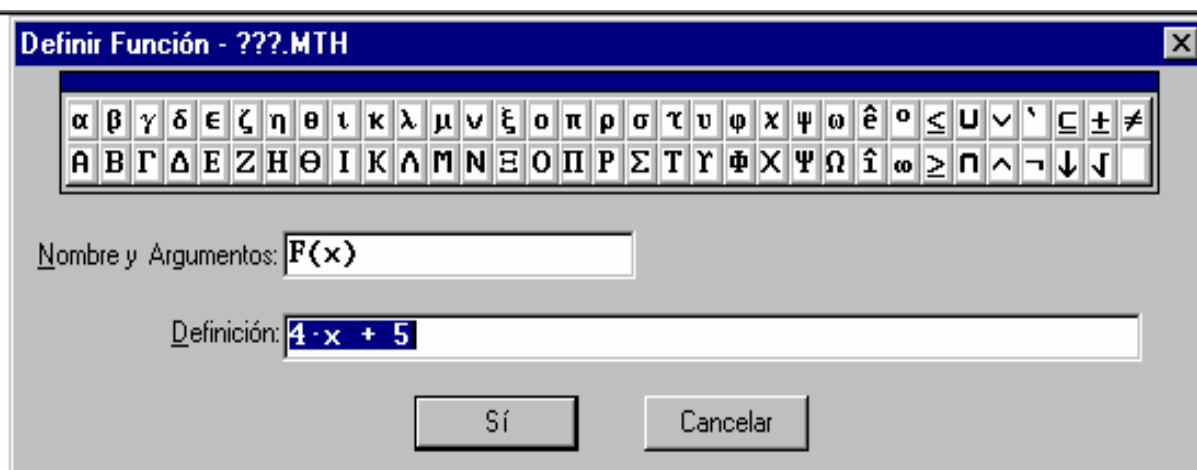
Se incluyen archivos y utilidades suministrados por usuarios. El directorio \Users del CD de DERIVE incluye archivos y utilidades que han sido desarrollados por diversos usuarios de DERIVE. Algunas de esas contribuciones se distribuyen como archivos MTH acompañados por archivos DOC (documentación) y DMO (demostración), que tienen el mismo nombre que el archivo MTH. Otros se distribuyen como archivos DFW y contienen su documentación y ejemplos. Constantemente se realizan mejoras significativas a este asistente matemático. En los últimos tiempos han aparecido nuevas versiones pertenecientes a la familia de los 5, que presentan mejoras significativas, pero manteniendo la misma filosofía de trabajo.



### Anexo # 3: La utilización del Derive en la enseñanza de las Funciones Lineales:

El presente material muestra como realizar el tratamiento del contenido relacionado con las funciones lineales simultáneamente con la introducción de los conocimientos necesarios para el trabajo con el DERIVE en esta unidad. Este tratamiento se realizó a partir del momento en que ya se había definido función lineal. Se comienza con la introducción de los elementos fundamentales del DERIVE:

**Definir Función** se utiliza para definir una función. En el cuadro de diálogo se invita a introducir el nombre de la función y sus argumentos (por ejemplo,  $F(x)$ ) y su definición, es decir, las operaciones que realiza la función usando esos argumentos y las funciones y constantes del programa (por ejemplo  $4x+5$ ).



**Simplificar Sustituir Variables**, sirve para sustituir por valores o expresiones cada una de las variables de la expresión resaltada.

SUB

Para esto haga clic sobre

o pulse Ctrl+W . Se le presentará una ventana de diálogo con una lista de las variables de la expresión resaltada y una línea para introducir los valores de las variables que van a ser sustituidas. Después de hacer clic sobre una variable,

haga clic sobre la línea de sustitución e introduzca el nuevo valor que sustituirá a la variable:

**Sustitución de variables en #1**

Variables: **x**

Sustitución: **-1**

Sí    Simplificar    Cancelar

Utilizando reiteradamente esta orden es posible obtener los valores de la función para los valores de la variable  $x$  seleccionados. En la siguiente tabla se muestran los valores de  $y$  obtenidos para diferentes valores de  $x$ :

$x$	$y$
0	5
1	9
-1	1
2	13
-2	-3
0.5	7
-0.5	3
1.6	11.4
-1.6	-1.4
2.31	14.24
-2.31	-4.24
2.55	15.2

**Observación:**

Si comete algún error o simplemente desea borrar una expresión utilice la orden Edición Borrar:

La orden Edición Borrar, o la pulsación de Ctrl+R o de la tecla Supr, sirve para borrar un bloque de expresiones, es decir, un grupo de expresiones contiguas. Esta orden muestra un diálogo para especificar los números correspondientes a la primera y a la última expresión del bloque que será eliminado. Inicialmente, esos dos números coinciden con el de la expresión resaltada. Haga clic sobre Cancelar o pulse Esc para no seguir adelante con Edición Borrar. El bloque de expresiones se borra cuando se hace clic sobre el botón Sí o al pulsar Intro. Una expresión se borra completa aunque sólo esté resaltada una subexpresión suya.

¿Cómo escribir las coordenadas de un punto en Derive?

**Vector** se activa en el menú **Editar** o haciendo clic sobre:



en la barra de herramientas. Sirve para introducir un vector de expresiones matemáticas. Después de introducir el número de elementos, se le presentará una ventana para que pueda introducir cada uno de los elementos del vector:



Cuando haya terminado, haga clic sobre SÍ o pulse Intro. Haga clic sobre Simplificar o pulse Alt+S para simplificar el vector en lugar de introducirlo (se añadirá a la ventana sólo el resultado).

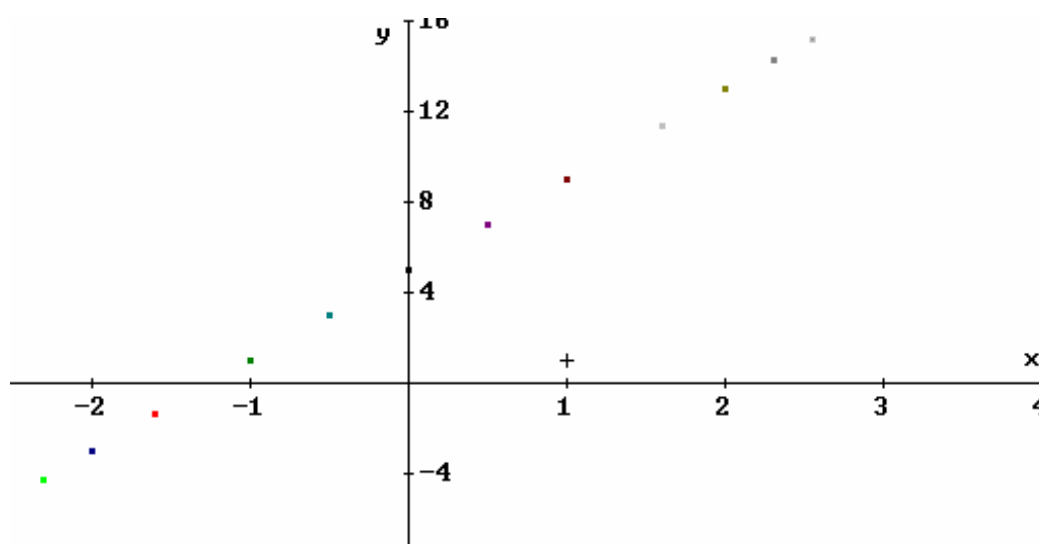
Para el ejemplo que se trata se obtiene:

$[0; 5]$ ,  $[1; 9]$ ,  $[-1; 1]$ ,  $[2; 13]$ ,  $[-2; -3]$ ,  $[0,5; 7]$ ,  $[-0,5; 3]$ ,  $[1,6; 11,4]$ ,  $[-1,6; -1,4]$ ,  $[2,31; 14,24]$ ,  $[-2,31; -4,24]$  y  $[2,55; 15,2]$ .

Seleccionando uno a uno estos puntos, se representan en la ventana 2D, la cual se activa haciendo clic sobre:



Haciendo clic sobre **Representar** queda representado el punto; repitiendo estas acciones se llega a representar los doce puntos en el mismo sistema de coordenadas rectangulares:



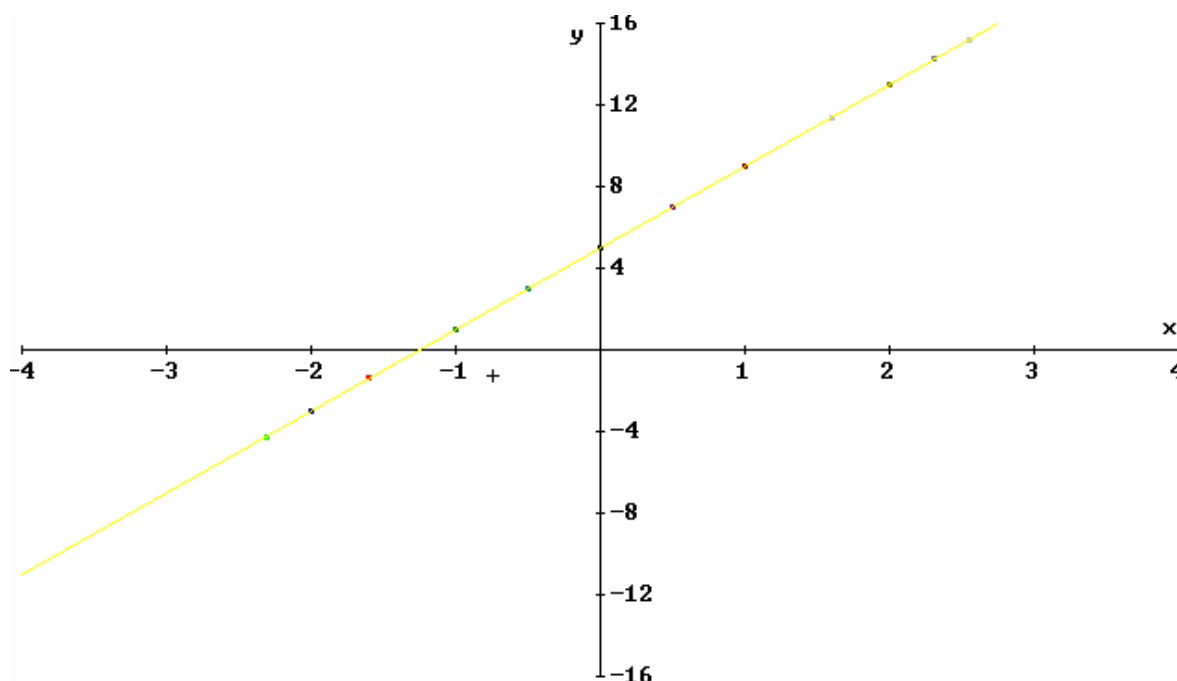
La determinación de las coordenadas de los puntos se recomienda realizarla distribuyéndolos entre todos los estudiantes. La representación gráfica de los doce puntos la realizarán todos simultáneamente.

Por medio de preguntas se induce a los estudiantes a la idea del gráfico de la función (una recta).

Se regresa a la Ventana Álgebra haciendo clic en:



Activando la ecuación de la función y regresando a la Ventana 2D se representa la recta que contiene a los puntos resaltados.



En este momento, mediante conversación con los estudiantes, se llega a la conclusión de que solo es necesario representar dos puntos para poder trazar la recta y que en lo adelante no será necesario realizar todo este proceso para representar gráficamente una función lineal; será suficiente con definir la función, pasar a la ventana 2D y hacer clic sobre **Representar**. Si fuera necesario, es posible representar en el mismo sistema hasta 12 funciones.

Para fijar el procedimiento se ordenará a los estudiantes representar gráficamente, primero en un papel y luego utilizando el Derive funciones como las siguientes:

$$G(x) = 4x, H(x) = 4x - 1, P(x) = -4x, R(x) = 2x + 1$$

Para comparar los valores de varias gráficas, puede activarse el **modo de trazado**. Cuando se activa el modo de trazado, el cursor se muestra como un pequeño cuadrado sobre una de las gráficas. Con el botón derecho del ratón o las teclas de Flecha Derecha o Flecha Izquierda, se puede ir recorriendo esa gráfica. Para trazar otra de las gráficas, haga:

- Flecha Arriba o clic en el botón derecho del ratón y elija Trazar la gráfica previa
- Flecha Abajo o clic en el botón derecho del ratón y elija Trazar la gráfica siguiente.

En el modo de trazado, el número de la expresión que se está trazando se muestra en el título de la ventana. Así, cuando se representan varias expresiones, el modo de trazado es adecuado para determinar la relación entre la gráfica y su expresión. Una gráfica particular puede ser borrada usando la orden Editar Borrar.

El modo de trazado resulta muy útil para el estudio de las propiedades de las funciones:

Para el análisis del Dominio de definición y la imagen de una función lineal: Recorriendo la curva con el cursor se aprecia en la barra inferior de la ventana como van variando los valores de  $x$  e  $y$ , pues se ofrecen las coordenadas del punto en el cual se encuentra el cursor, si a esto se agrega la posibilidad de ir ampliando la escala del eje que nos interesa ( $x$  o  $y$ ), se puede inducir a los estudiantes a que tanto el dominio como la imagen de este tipo de funciones es el conjunto de los números reales. Se debe llevar a los estudiantes a “descubrir” el dominio y la imagen utilizando este procedimiento

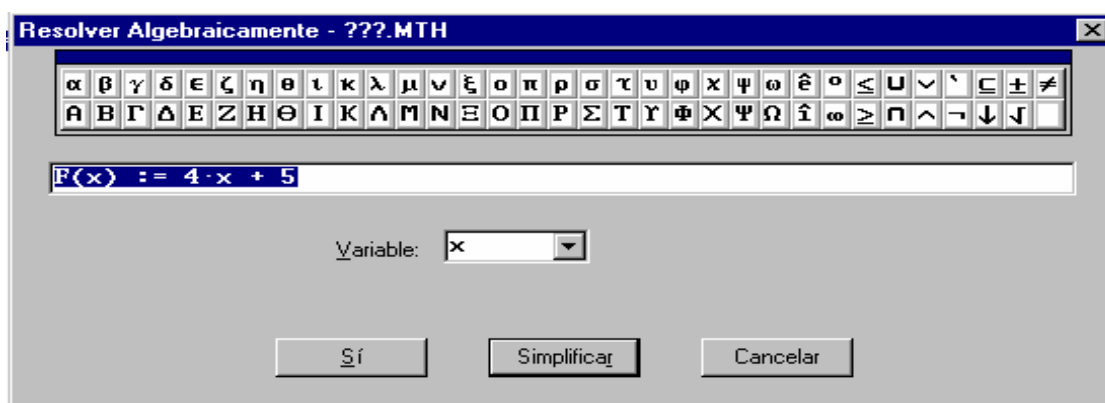
Para el análisis de la monotonía de la función: Recorriendo la curva de izquierda a derecha, el cursor nos muestra como van variando las coordenadas de los puntos, lo que permite realizar suposiciones acerca de la monotonía de la función y su relación con el valor de  $m$  (pendiente). Esto será confirmado por el profesor. Posteriormente se realizará la demostración formal de la monotonía.

Para determinar la característica que tienen los puntos en los cuales la recta corta a los ejes coordenados: al ubicar el cursor sobre estos puntos se puede observar en la barra inferior como la abscisa o la ordenada se hacen cero según el caso. Repitiendo este proceso con algunas de las funciones representadas, se puede confirmar la validez de la suposición y pedir calcular a mano los interceptos con el eje  $x$  (ceros) y con el eje  $y$  de algunas funciones. A continuación se enseña a realizar este proceso utilizando el DERIVE:

Para calcular los ceros de la función  $F$  es necesario resolver la ecuación  $F(x)=0$ ; en DERIVE se resuelve mediante la orden **Resolver** de la ventana de Álgebra. **Resolver** sirve para resolver ecuaciones o relaciones, algebraica o numéricamente, o para resolver sistemas de ecuaciones. Con más precisión, hay que decir que sirven para introducir expresiones que, después de simplificar o aproximar, serán las soluciones de la ecuación, relación o sistema. Activando la ecuación de la función a la que se le quieren calcular los ceros se hace clic sobre la tecla:



Por ejemplo, calcular los ceros de la función con la que se ha estado trabajando. Se marca la ecuación, se activa la tecla Resolver y aparece el cuadro:



Si se hace clic sobre Sí se obtiene inmediatamente la respuesta:

**SOLVE(F(x) := 4 · x + 5, x)**

Lo que significa que se va a resolver la ecuación  $4x+5=0$ .

Haciendo clic sobre la tecla Simplificar



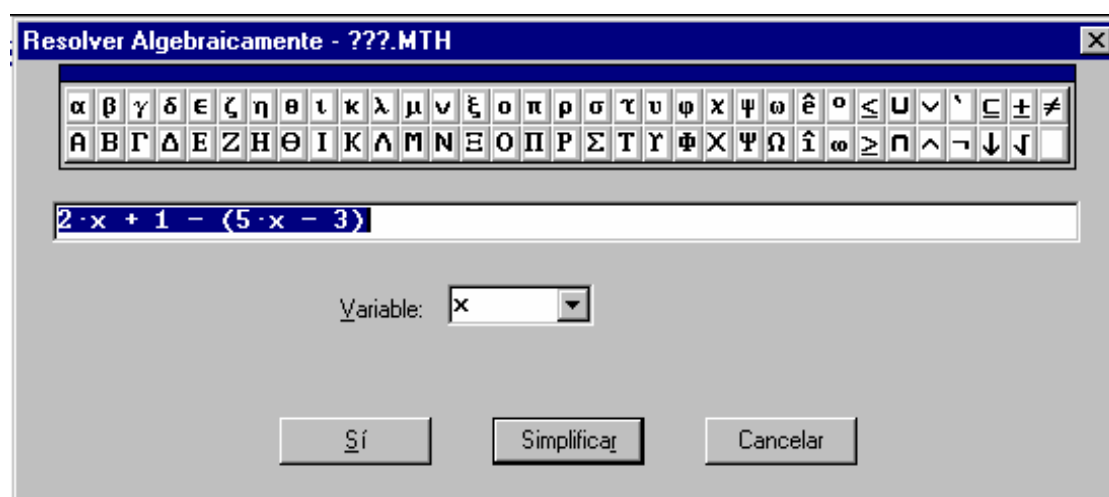
se obtiene el cero de la función (solución de la ecuación)

$$\left[ x = -\frac{5}{4} \right]$$

Si se hace clic sobre simplificar se obtiene directamente:

$$\left[ x = -\frac{5}{4} \right]$$

Esta orden se puede utilizar también para determinar el punto de intersección de dos rectas, para esto basta con hacer clic en Resolver y seleccionar ecuación, aparecerá el cuadro de diálogo anterior. Si se quiere hallar, por ejemplo, el intercepto de las rectas cuyas ecuaciones son  $F(x)=2x+1$  y  $G(x)=5x-3$ , debe teclear en el espacio en blanco:  $2x+1 - (5x-3)$ , como se aprecia a continuación:



Aceptando y simplificando, se obtiene:

**SOLVE(2 · x + 1 - (5 · x - 3), x)**

$$\left[ x = \frac{4}{3} \right]$$

Para mostrar las transformaciones que producen en el gráfico de la función  $f(x)=mx+n$  las variaciones de  $m$  y  $n$  es necesario introducir la orden Cálculo Vector o VECTOR. Esta orden se usa para generar un vector con los valores de una expresión evaluados en una sucesión de puntos. La orden le permite seleccionar la variable, el valor inicial, el valor final y el tamaño del salto o incremento que determina los puntos en los que será evaluada la expresión. Si se omite el salto, se supone que es 1.



Ejemplo :

a) VECTOR (mx, m, -3,5) dará origen al conjunto de funciones cuyas ecuaciones son:  $y=-3x$ ,  $y=-2x$ ,  $y=-x$ ,  $y=0$ ,  $y=x$ ,  $y=2x$ ,  $y=3x$ ,  $y=4x$  e  $y=5x$

Para esto se hará clic en Editar y seleccionar Expresión o hacer clic en la tecla:



Y al aparecer el cuadro de diálogo, escribir la orden ya indicada:

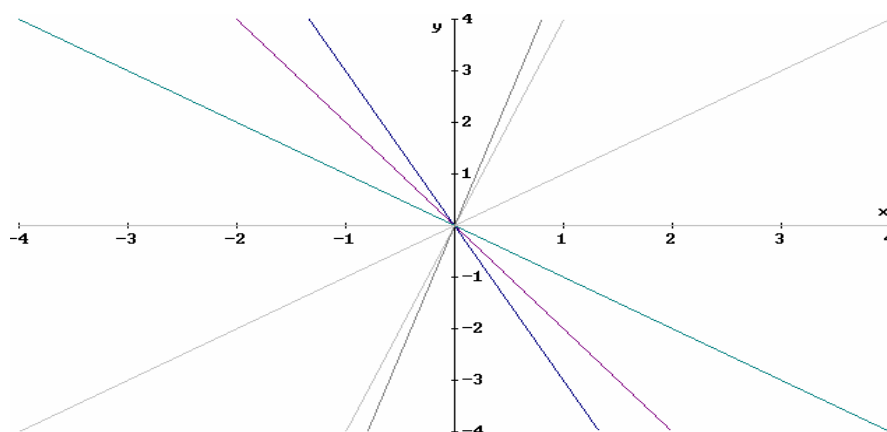


Luego de aceptar y simplificar se obtiene:

**VECTOR(m·x, m, -3, 5)**

**$[-3 \cdot x, -2 \cdot x, -x, 0, x, 2 \cdot x, 3 \cdot x, 4 \cdot x, 5 \cdot x]$**

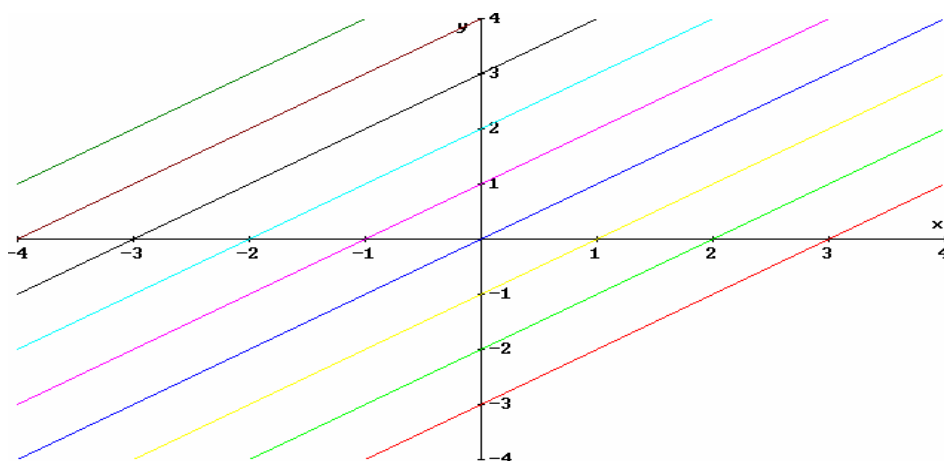
Al representar en la ventana 2D se obtiene:



Y utilizando el modo de trazado se puede reconocer el gráfico de cada función y realizar las valoraciones necesarias acerca de la variación del gráfico, según

sea  $m$  positiva o negativa o cuando este valor va aumentando. Si se selecciona el paso entre 0 y 1 es posible de la misma manera hacer el análisis correspondiente.

b) Con VECTOR ( $x+n$ ,  $n$ , -3,5) Se obtienen los gráficos de las funciones  $y=x-3$ ,  $y=x-2$ ,  $y=x-1$ ,  $y=x$ ,  $y=x+1$ ,  $y=x+2$ ,...,  $y=x+5$ . Representados todos en el mismo sistema de coordenadas rectangulares:



permite estudiar las traslaciones en la dirección del eje  $y$ .

¿Cómo se pueden representar funciones reales con restricciones en el Dominio de definición?

Para esto es necesario introducir la condicional IF.

La forma general de las expresiones IF es:

IF (test, entonces, en caso contrario, en caso de duda)

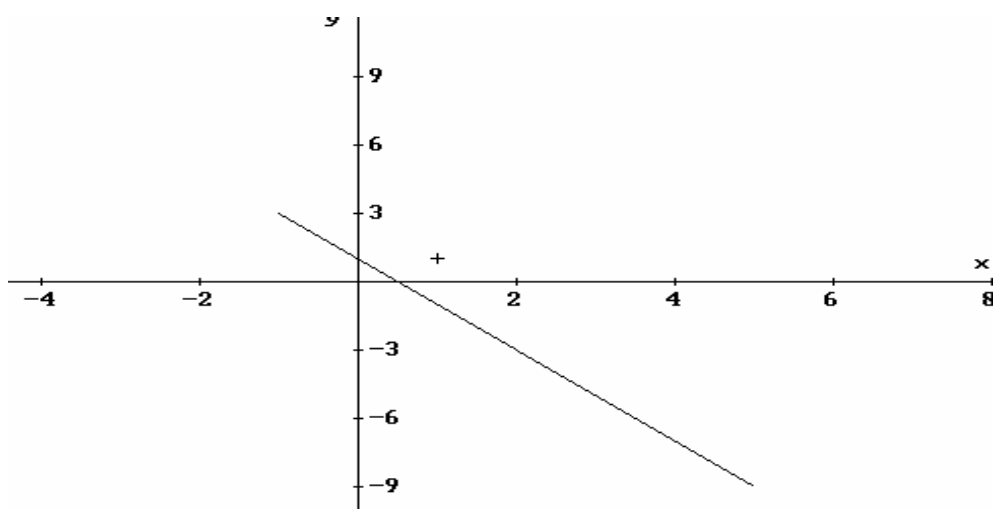
donde test es una condición, y entonces, en caso contrario, y en caso de duda son expresiones.

Ejemplo:

Representar gráficamente la función  $f(x) = -2x+1$  en el intervalo  $[-1; 5]$

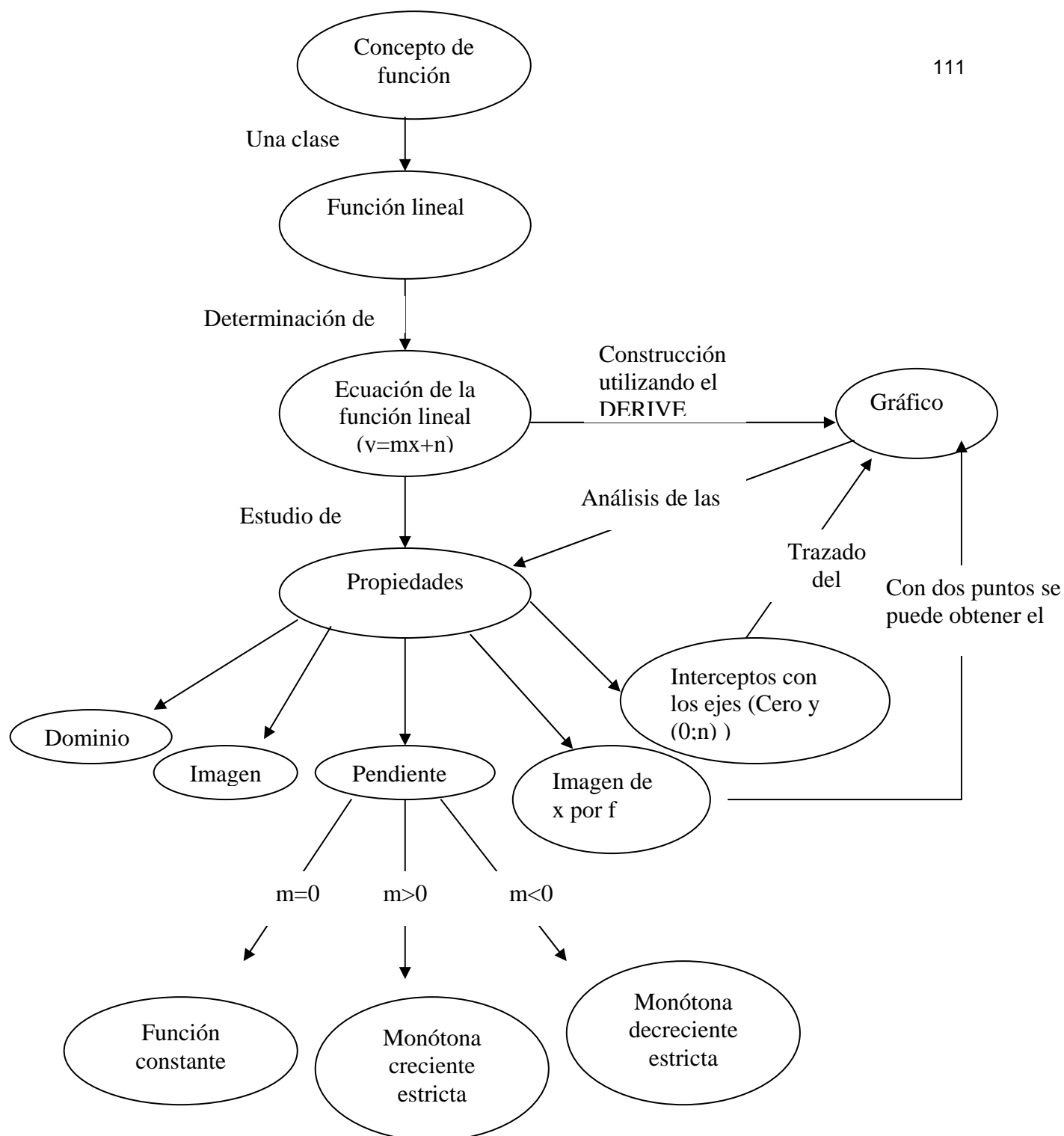
Se utiliza:

IF( $-1 \leq x \leq 5$ ,  $-2x+1$ ), se obtiene:



Antes de comenzar la etapa de fijación se debe elaborar mapas conceptuales correspondientes a la clase de funciones por parte de dúos de estudiantes, los que se someterán a discusión en el grupo. Se recomienda comenzar con mapas incompletos, que los estudiantes pueden ir completando.

A continuación se muestra uno de los mapas conceptuales confeccionados por los estudiantes en la experiencia llevado a cabo en esta investigación:



A partir de este momento se realizará una ejercitación variada con ejercicios que satisfagan las condiciones de la propuesta metodológica. A continuación se plantean los utilizados en esta experiencia en el tema de Funciones lineales:

1-Dada la función  $f$  tal que  $f(x)=3x-1$ :

- Halla  $f(0)$ ,  $f(1)$  y  $f(1/3)$
- Representa gráficamente la función.
- Verifica utilizando el DERIVE que la representación gráfica que realizaste es correcta.
- Determina  $x$  si  $f(x)=10$ ,  $f(x)=-2$ ,  $f(x)=-2/5$ . Comprueba tu respuesta utilizando el modo de trazado para el ploteo de puntos.
- Determina, utilizando el DERIVE los valores de  $x$  e  $y$  para los cuales los puntos  $A(x, 6)$ ,  $B(3,y)$  y  $C(-2,y)$  pertenecen a la gráfica de  $f$ .

2- Representa en una misma ventana las funciones  $f(x)=-0.2x$ ,  $g(x)=4x-4$ ,  $h(x)=1/2 x+2$ .

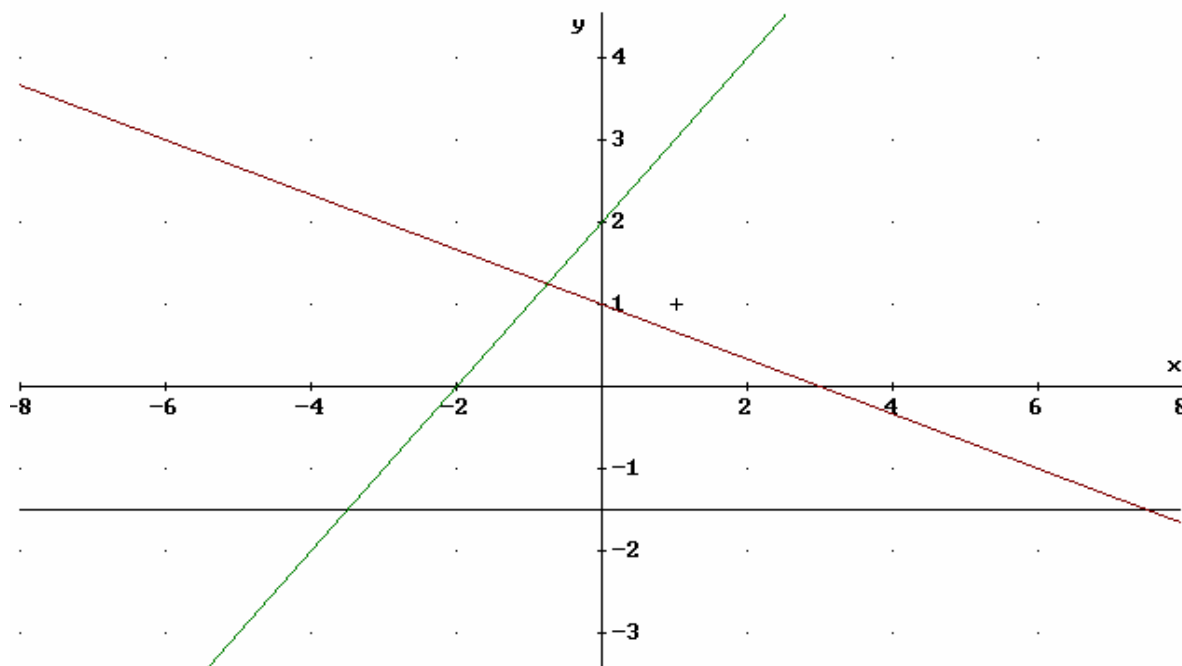
Determina gráficamente las coordenadas de los puntos de intersección de estas funciones. Verifica tus resultados realizando los cálculos a mano.

Determina los ceros de las tres funciones y comprueba gráficamente tus resultados.

3- Representa gráficamente la función  $y=6x+5$  utilizando el DERIVE. Comprueba gráficamente si los siguientes puntos pertenecen a la representación gráfica de la misma:

a)  $P_1(0;5)$    b)  $P_2(2;7)$    c)  $P_3(1/2;7)$    d)  $P_4(-1;1)$

4- En la ventana 2D aparecen representadas las siguientes funciones:



- Escribe las ecuaciones de las funciones representadas.
- Determina las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de las funciones.
- ¿En qué puntos cortan las gráficas al eje  $y$ ?
- ¿Cuáles son los ceros de las funciones?

5- Define la función  $\text{VECTOR}(mx, m, 1, 5)$ .

- Representala gráficamente.
- A partir del gráfico identifica cada una de las funciones que aparecen. ¿Cómo procediste para identificarlas?
- ¿Cómo se comportan las gráficas de las funciones en la medida en que aumenta  $m$ ?

6- Define la función  $\text{VECTOR}(mx, m, 0, 2, 1/2)$ .

- Representala gráficamente.
- A partir del gráfico identifica cada una de las funciones que aparecen.
- ¿Cómo procediste para identificarlas?

- Describe el comportamiento de las gráficas de las funciones en los casos  $m < 1$  y  $m > 1$ .

7- Define la función  $\text{VECTOR}(2x+n, n, -2, 2, 1)$ .

a) Representala gráficamente.

b) A partir del gráfico identifica cada una de las funciones que aparecen.

¿Cómo procediste para identificarlas?.

Describe el comportamiento de las gráficas de las según varía  $n$ .

8- Define la función  $\text{VECTOR}(-3x+n, n, 1, 3, 1/2)$ .

a) Representala gráficamente.

b) A partir del gráfico identifica cada una de las funciones que aparecen.

¿Cómo procediste para identificarlas?.

Describe el comportamiento de las gráficas según varía  $n$ .

9- De una función lineal  $f(x)=mx+n$  se conocen  $m$  y  $n$ .

9.1- Indica dos pares numéricos que satisfagan la ecuación correspondiente a cada caso y traza su gráfica.

9.2- Comprueba utilizando el DERIVE que la gráfica está bien representada y comprueba utilizando el modo de trazado que los dos puntos que determinaste pertenecen a la gráfica:

$m=2, n=1$

$m=1.5, n=2$

$m=0, n=-3/4$

10- Determina la ecuación de una función lineal cuya gráfica pasa por los puntos  $A(1;5)$  y  $B(-2; -1)$ . Representala gráficamente utilizando el DERIVE y determina a partir de la gráfica las coordenadas de otros tres puntos que pertenecen a la misma.

11- La gráfica de una función lineal pasa por el origen de coordenadas y por el punto  $P(3,2)$ .

Escribe la ecuación de dicha función.

Represéntala gráficamente utilizando el DERIVE.

Verifica en la pantalla cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la gráfica:

$A(-1; -2/3)$  ,  $B(-1; 2/3)$  ,  $C(2; 5)$  ,  $D(0; -1)$  ,  $E(2; 4/3)$ .

12- Traza, utilizando el DERIVE, en un mismo sistema de coordenadas rectangulares las gráficas de las funciones  $f(x)=2$ ,  $g(x)=2x+4$ ,  $h(x)=-2x+4$

- Determina las coordenadas de los puntos de intersección de las rectas calculándolas a mano, en la ventana de Álgebra y verifica en la ventana 2D.
- Calcula el área de la figura geométrica limitada por estas rectas.

13- Calcula el cero, en caso de que exista, de cada una de las siguientes funciones y verifica tus resultados utilizando el DERIVE y a partir de la representación gráfica:

$y=0.4x-12$     b)  $y=6-2x$     c)  $y=-5x$     d)  $y=3/7 x-2$     e)  $y=0.2x-0.7$

f)  $y=-6/25 x+1$     g)  $y=0$     h)  $y=-3$

14- De una función se conoce que su cero es 5 y que interseca al eje y en el punto de ordenada  $-1$ . Represéntala gráficamente utilizando el DERIVE.

15- Representa en un mismo sistema de coordenadas, utilizando el DERIVE, las funciones:

$$f(x)=1/2 x+1$$

$$g(x)=-f(x)$$

$$h(x)= f(x+1)$$

$$p(x)= f(x)+3$$

$$q(x)=2f(x).$$



Describe las transformaciones que sufrió la gráfica de  $f$  en los incisos b) al e).

16- Representa gráficamente, utilizando el DERIVE, las funciones  $f(x)=1$  y  $g(x)=3$

Determina la ecuación de la función lineal que corta a las rectas  $y=1$  en  $(5;1)$  e  $y=3$  en  $(3;3)$ .

Identifica la figura que queda delimitada por estas tres rectas y el eje  $y$ .  
Determina su área.

17- Dibuja, utilizando el DERIVE, el triángulo de vértices  $A(-2; -1)$ ,  $B(3;2)$ ,  $C(-8;9)$ . Halla las pendientes de los tres lados del triángulo. Sugerencia: Utilice la función IF.

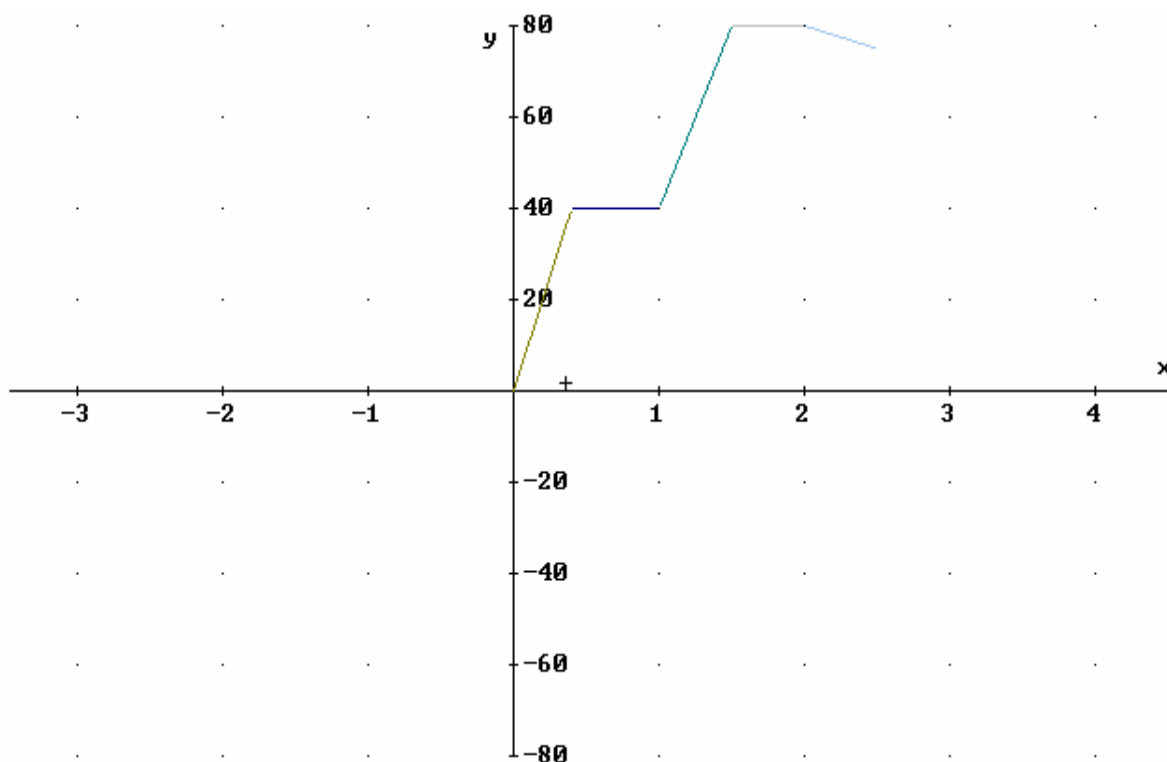
18- Determina cuáles de las siguientes funciones son crecientes o decrecientes. Fundamenta tu respuesta. Representálas gráficamente en un mismo sistema coordenado y a partir del gráfico identifica las coordenadas de los puntos de intersección entre las rectas.

$f(x)=2x-1$    b)  $g(x)=2x+1$    c)  $h(x)=4$    d)  $p(x)=-x+1$

19- En una competencia de pistas y señales un competidor recorrió todo el trayecto en 2,5 minutos. La relación entre el tiempo y el espacio recorrido viene dada por el siguiente gráfico. (Se supone que el movimiento se realizó con velocidad constante).

- Escribe la ecuación que describe la función en los intervalos  $(0;0.4)$ ,  $(1;1,5)$  y  $(2;2,5)$ .
- ¿Cuántos metros recorrió el competidor?
- Traza el segmento que une los puntos  $(2.5,60)$  y  $(3,0)$ . Determina la ecuación de la función cuya gráfica contiene a este nuevo segmento.

Halla el área de la región plana que se obtiene al agregar el nuevo segmento y limitándola inferiormente por el eje de las abscisas.



Observación: El gráfico se da en una ventana 2D del DERIVE. Para construirlo se utilizó la función IF con  $y=100x$  en  $[0;0,4)$ ,  $y=40$  en  $[0,4;1)$ ,  $y=80x-40$  en  $[1;1,5)$ ,  $y=80$  en  $[1,5;2)$  e  $y=100-10x$  en  $[2;5/2)$

20- Dada la función lineal  $f(x)=\frac{4}{5}x+3$ .

- Representa utilizando el DERIVE la parte del gráfico de  $f$  cuyos puntos tienen ordenadas no negativas.
- Determina la ecuación de la función lineal cuya gráfica corta al eje  $y$  en el mismo punto en que lo hace la gráfica de  $f$  y al eje  $x$  en el punto  $(3,0)$  y represéntala en el mismo sistema coordenado.
- Calcula el perímetro y el área de la figura geométrica que se obtiene al agregarle el segmento del eje  $x$  comprendido entre los puntos  $(-15/4;0)$  y  $(3;0)$ .

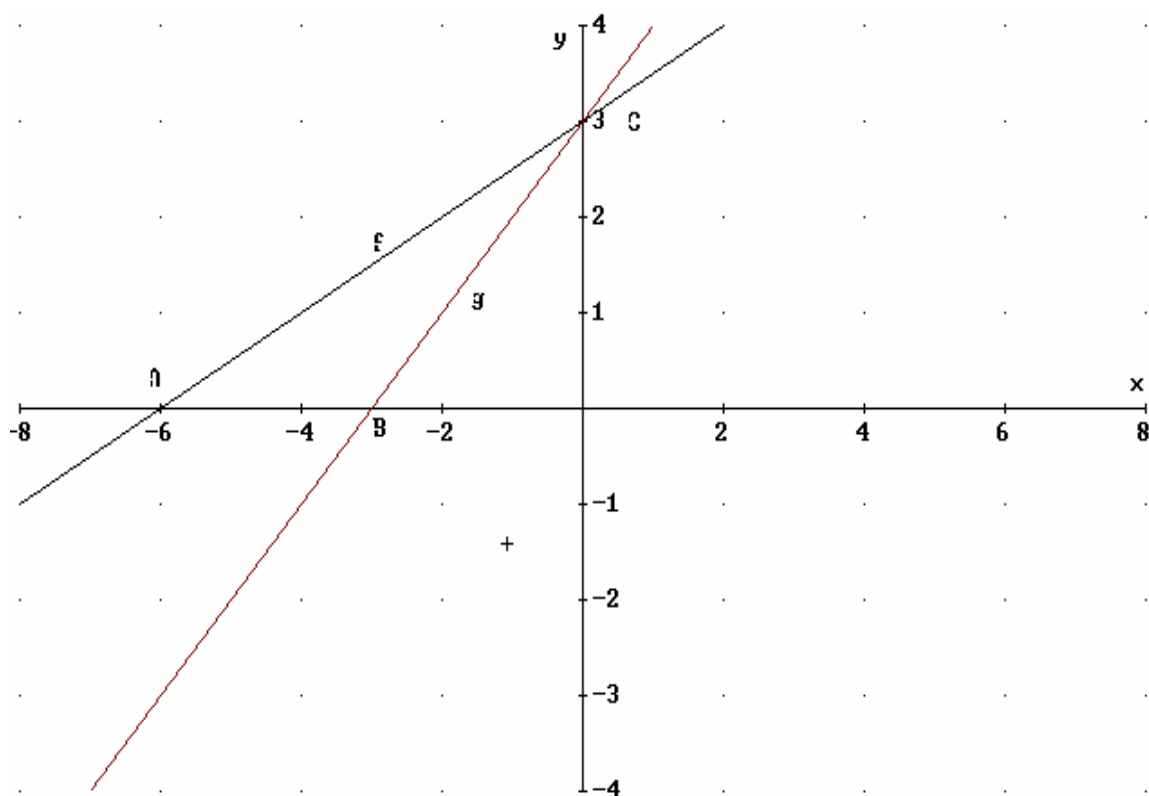
21-Dada la función  $f(x)=4-5x$ ,  $-3 \leq x \leq 5,6$

- Represéntala gráficamente utilizando el DERIVE.

- Analiza si el punto  $(1,1; -1,5)$  pertenece a la gráfica de la función. Compruébalo con el modo de trazado.
- Sin realizar cálculos ordena  $f(-1)$ ,  $f(-0,75)$  y  $f(1,9)$ . Justifica tu respuesta.

22- En una ventana 2D del DERIVE aparecen representadas las funciones  $f$  y  $g$  cuyas gráficas cortan a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Si se sabe que  $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ .

- Escribe la ecuación de la función  $g$  cuya gráfica corta al eje  $y$  en punto C y forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje OX. Este punto B de intersección satisface  $A < B < 0$
- Realiza una estimación del área del triángulo utilizando las rejillas.
- Calcula el área del triángulo ABC.



23-En cierta ocasión Carlos acompañó a su tío en un viaje que este realizó en su automóvil. En un corto trayecto de ese viaje, Carlos hizo algunas observaciones y las registró en una tabla:

Tiempo medido en minutos (t)	2	3	4	6
Distancia recorrida en Km (e)	3	4,5	6	9

- ¿Cuántos metros recorrió el automóvil en 4,5 minutos?
- Representa en una ventana 2D del DERIVE los pares ordenados que aparecen en la tabla. ¿Están contenidos en una recta todos los puntos representados?
- Determina la ecuación de la función y represéntala en el intervalo  $[2; 6]$
- Calcula  $e(1,6)+e(1,8)$ . ¿Qué significado puede atribuirse a la suma anterior?
- Resuelve la ecuación  $2/5 [e(2\frac{1}{2})]-e(x/2)=-1,05$  y comprueba tu respuesta utilizando el DERIVE.
- ¿Qué representa la pendiente de la recta  $r$  que contiene al segmento representativo de la gráfica de la función  $e$ , en el movimiento o recorrido del automóvil?
- ¿Existe el número  $k$  tal que  $e(2k-0,1)=3/4+e(1,2)$ ?. Fundamenta tu respuesta.

24- La presión máxima normal ( $p$ ) de una persona cuya edad es  $a$  años, viene dada por la fórmula  $p=100+a/2$  ( $p$  se expresa en mm de mercurio).

- Construye una tabla donde aparezcan las presiones máximas normales de personas cuyas edades sean 40,50,60,70 y 80 años. Utiliza el DERIVE para obtener estos valores.
- ¿Qué significado tiene la notación  $p(90)$ ?. Calcula  $p(55)$
- Determina la razón entre las presiones de dos personas cuyas edades son 30 y 60 años respectivamente.

- Representa gráficamente, utilizando el DERIVE, la función lineal representada por la fórmula dada.
- Determina la pendiente de la función representada en el inciso anterior.
- Analiza la pendiente de la función y explique qué significado tiene la misma.

25-Para convertir grados Celsius (c) a grados Fahrenheit (f) se usa la fórmula:  
 $f = \frac{9}{5}c + 32$ .

- Di qué tipo de función es la definida por la fórmula dada.
- Forma una tabla en la que relaciones los siguientes valores de temperatura con sus correspondientes en Fahrenheit:  $-10^{\circ}\text{C}$ ,  $-5^{\circ}\text{C}$ ,  $0^{\circ}\text{C}$ ,  $10^{\circ}\text{C}$ ,  $15^{\circ}\text{C}$ ,  $20^{\circ}\text{C}$  y  $25^{\circ}$ . Utiliza para esto el DERIVE
- Expresa esta relación como un conjunto de pares ordenados.
- Representa la relación utilizando diagramas.
- Representa, utilizando el DERIVE, la función definida por la fórmula dada.
- Si una persona tiene una temperatura de 104 grados Fahrenheit, ¿Tiene fiebre?.
- En Londres hace unos meses hubo una temperatura de 14 grados Fahrenheit, ¿Hubo frío o calor?.
- Sin realizar cálculos ordena de menor a mayor los números siguientes, siendo f la función definida por la fórmula dada:  $f(45)$ ,  $f(60)$ ,  $f(0)$ ,  $f(-60)$ ,  $f(128)$ ,  $f(-10)$ .
- Sin realizar cálculos escribe el signo que corresponda ( $=$ ,  $<$ ,  $>$ ):
 

$f(45)$ _____ $f(-70)$	$f(-20)$ _____ $f(-40)$
$f(30,5)$ _____ $f(30)$	$f(40,5)$ _____ $f(40\frac{1}{2})$
$f(-60)$ _____ $f(-40)$	

26- Dada la función lineal  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ . Determina qué condiciones deben cumplir a y b para que la gráfica de la función  $g(x) = ax + b$  sea perpendicular a la gráfica de f.

- ¿Cuántas funciones cumplen esta condición?
- Representa, utilizando el DERIVE, la función  $f$  y una de las funciones que satisfacen la condición dada.
- De las figuras que se forman considere una que quede delimitada por las dos rectas y los ejes coordenados, estima su área y calcúlala.

27- Dada la función  $f(x)=3x+4$ . Determina qué condiciones deben cumplir  $c$  y  $d$  para que la gráfica de la función  $g(x)=cx+d$  sea paralela a la gráfica de  $f$ .

Representa, utilizando el DERIVE la función  $f$  y una de las funciones que satisfagan la condición anterior para la cual  $d>4$ .

Considera la figura que queda delimitada por estas dos rectas y los ejes coordenados. Calcula el perímetro y el área.

Representa en otra ventana 2D la función  $f$  y otra que satisfaga la condición anterior con  $d<0$ . ¿Cuál debe ser el valor de  $d$  para que los triángulos que se forman entre estas rectas y los ejes coordenados tengan igual área?

28-En una circunscripción se acostumbra a medir el consumo de electricidad el día primero de cada mes. El pasado 1ero de Marzo el metro contador de un usuario marcó a las 12 del mediodía un consumo de 118 Kwh. La lectura era en ese momento 88574. A partir de ese día el consumo creció en forma lineal hasta llegar al 1ero de Abril a la misma hora. En ese momento la lectura fue 90656.

- Determina la ecuación de la función lineal que modela el problema
- De continuar este comportamiento, ¿Cuál debe ser la lectura del metro contador el 1ero de Junio a la misma hora?
- Elige una escala adecuada para representar la función utilizando el DERIVE en el intervalo  $[0;31]$ . (Sugerencia: Considera que el cero en el eje de las abscisas representa al 1ero de Abril a las 12:00 meridiano, por lo que el 1 será el 2 de Abril a las 12:00 meridiano, y así sucesivamente).

- Utilizando el modo de trazado determina el consumo de electricidad hasta el día 7 de Abril y hasta el día 23 del propio mes, a las 12:00 meridiano.
- ¿Cuál debió ser la lectura del metro contador el día 2 de Abril a las 6:00 p.m.? Justifica tu respuesta.

29- Un avión sobrevoló en línea recta una ciudad en 5 minutos. Si la velocidad de éste era de 200 m/s:

- Representa, utilizando el DERIVE, en un sistema de coordenadas rectangulares la función  $v(t)$ .
- Calcula la longitud de la ciudad en la dirección del vuelo del avión.
- ¿Qué relación existe entre la distancia recorrida por el avión y el área de la figura geométrica que se forma entre los ejes coordenados, la gráfica de  $v(t)$  y la recta paralela al eje  $y$  que contiene al punto  $(5;0)$ ?

30- Un cuerpo que, partiendo del reposo, con un movimiento uniformemente acelerado llega a alcanzar una velocidad de 32,4 m/s a los 4 segundos continúa con esta velocidad durante otros 7 segundos.

- Construye, utilizando el DERIVE, la gráfica de la velocidad con respecto al tiempo.
- Calcula la distancia recorrida por el cuerpo al cabo de 2s, 4s, 6s y 11s, utilizando las fórmulas físicas correspondientes y las diferentes vías posibles utilizando los recursos matemáticos a tu disposición. Verifica los resultados utilizando el DERIVE.

31- En la siguiente tabla se muestra el estado mundial de la pesca en algunos años entre 1938 y 1995.

- Representa estos datos, utilizando el DERIVE, en un sistema de coordenadas cartesianas. Sugerencia: Para facilitar la selección de la escala considere los años como 38,58,87,93,94 y 95. Así, los pares ordenados serían, por ejemplo:  $(38;21)$ ,  $(58; 33,2)$ , etc.

- b) Determina las ecuaciones de los segmentos de rectas que unen estos puntos, de forma tal que al representarlas gráficamente, la quebrada obtenida permita ilustrar el comportamiento de la pesca de una forma más clara. ¿Qué función del DERIVE permite representar gráficamente estos segmentos de recta?
- c) Un estudiante analizó la quebrada obtenida y arribó a la conclusión de que en el año 1988 la pesca fue de 94,05 millones de toneladas. ¿Es correcta su observación?. Justifica tu respuesta.

Año	Millones de toneladas
1938	21
1958	33,2
1987	92,6
1993	101,3
1994	109,5
1995	112,3

32- En la siguiente tabla se muestra la producción pesquera en Cuba de algunos años entre 1958 y 1996, en miles de toneladas:

Año	Producción
1958	21000
1970	106 018
1987	214 408
1991	165 235
1993	93 560
1995	106 500
1996	123 900

- a) Representa estos datos en un sistema de coordenadas rectangulares, utilizando el DERIVE. Utiliza la sugerencia dada en el ejercicio anterior.



- b) Determina las ecuaciones de los segmentos de recta que unen a estos puntos, y representa gráficamente la poligonal abierta que se obtiene.
- c) Si a partir del año 1996 la pesca hubiera seguido creciendo linealmente según la función cuya ecuación hallaste en el intervalo (95;96). ¿Cuál debe ser la pesca en el año 2010?

33- Consulta las Enciclopedias a tu alcance y selecciona dos temas con los cuales puedas confeccionar problemas que se puedan resolver utilizando funciones lineales y resuélvelos utilizando el DERIVE.

34- Confecciona problemas relacionados con la comunidad en que vives o en que está enclavado tu centro de estudios, que se puedan resolver utilizando las funciones lineales a través del DERIVE

35- Investiga en tu comunidad y utilizando la enciclopedia electrónica “Encarta” la existencia de fenómenos y procesos que se puedan modelar haciendo uso de las funciones lineales.

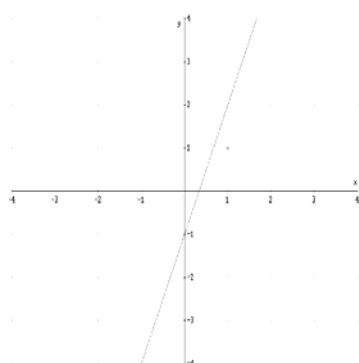
- a) Identifica en cada caso las variables presentes y las relaciones de dependencia existentes entre ellas.
- b) Modela cada proceso o fenómeno utilizando las ecuaciones que correspondan.
- c) Representa gráficamente las funciones utilizando el DERIVE.

Nota: Estos tres últimos problemas pueden ser utilizados para tareas extraclases por equipos de estudiantes y abordarlos en un seminario.

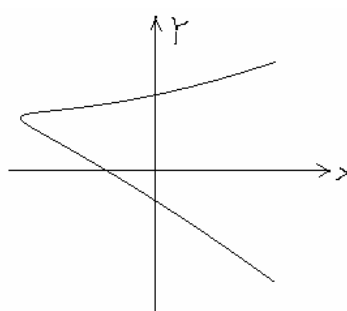
**Anexo # 4 : Prueba de entrada aplicada a los estudiantes que se utilizaron en la experiencia.**

- 1- Explique qué entiende por función.
- 2- Identifique cuáles de los siguientes gráficos representan funciones:

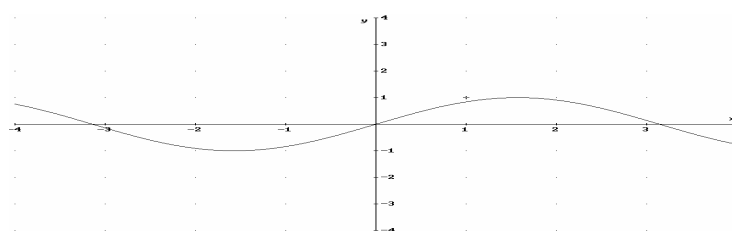
a)



b)



c)



3- ¿Qué tipo de funciones representan cada una de las ecuaciones siguientes:

a)  $f(x) = 3x - 1$

b)  $y = x^2 - 6$

c)  $y = 4^x$

d)  $y = \cos x$

e)  $F(x) = \ln x$

f)  $g(x) = 1/x$

4- Plantee una ecuación que modele cada una de las problemáticas siguientes:

a) La presión atmosférica varía con la altura.

b) La velocidad es función del espacio y el tiempo.

c) La cantidad de lluvia caída en una temporada influye en la producción de vegetales y esta a su vez en la calidad de la canasta alimenticia.

**Anexo # 5: Resultados de la prueba de entrada aplicada a los estudiantes de la experiencia**

Pregunta	Respuestas correctas	%
1	1	7,6
2-a	3	23,0
2-b	4	30,7
2-c	3	23,0
3-a	2	15,3
3-b	3	23,0
3-c	5	38,4
3-d	3	23,0
3-e	2	15,3
3-f	6	46,1
4-a	0	0
4-b	0	0
4-c	0	0

**Anexo # 6: Prueba aplicada al concluir el tema de Funciones lineales.**

1- Explique las definiciones de los siguientes conceptos:

- a) función
- b) función lineal

2- De la función  $Y=ax+5$ . Obtenga su gráfica a mano, verifique el resultado utilizando el DERIVE y analice:

- a) dominio de definición
- b) imagen
- c) ceros
- d) pendiente
- e) monotonía

3- Represente por medio de una ecuación funcional la problemática que se plantea en cada caso:

a) El consumo de electricidad en una vivienda aumentó de forma lineal de 118 Kw. en Octubre a 195 Kw. en Noviembre.

b) Se produjo un decrecimiento de forma lineal en el peso de los cerdos de acuerdo con la disminución de la cantidad de miel suministrada.

**Anexo # 7: Resultados de la prueba aplicada al concluir las funciones lineales.**

Pregunta	Respuestas correctas	%
1-a	13	100
1-b	13	100
2- Caso $a=0$ (gráfico)	13	100
a)	13	100
b)	12	92,3
c)	13	100
d)	13	100
e)	13	100
2- Caso $a>0$ (gráfico)	13	100
a)	13	100
b)	13	100
c)	13	100
d)	13	100
e)	13	100
2- Caso $a<0$ (gráfico)	13	100
a)	13	100
b)	13	100
c)	13	100
d)	13	100
e)	13	100
3-a	12	92,3
3-b	10	76,9

**Anexo # 8: Problemáticas planteadas a los estudiantes al concluir la experiencia:**

1- Represente por medio de una ecuación de una función las siguientes problemáticas:

- a) La temperatura ambiental varía con la altura.
- b) La producción de azúcar depende del estado de las maquinarias y de la calidad de la caña. Esta última será superior en la medida en que mejore la atención cultural.
- c) El crecimiento de una determinada colonia de bacterias se produce de forma exponencial
- d) El éxito del proceso docente educativo depende de la actitud del estudiante, la participación de la familia y demás factores de la sociedad, las condiciones de higiene ambiental y la maestría del profesor para conducir el proceso. Esta última es el resultado de la dedicación al estudio y la experiencia acumulada.
- e) La respuesta a un estímulo se considera como una función de las propiedades del estímulo, el tiempo de exposición al estímulo, el estado del organismo, la experiencia anterior de la persona y las características de su personalidad.

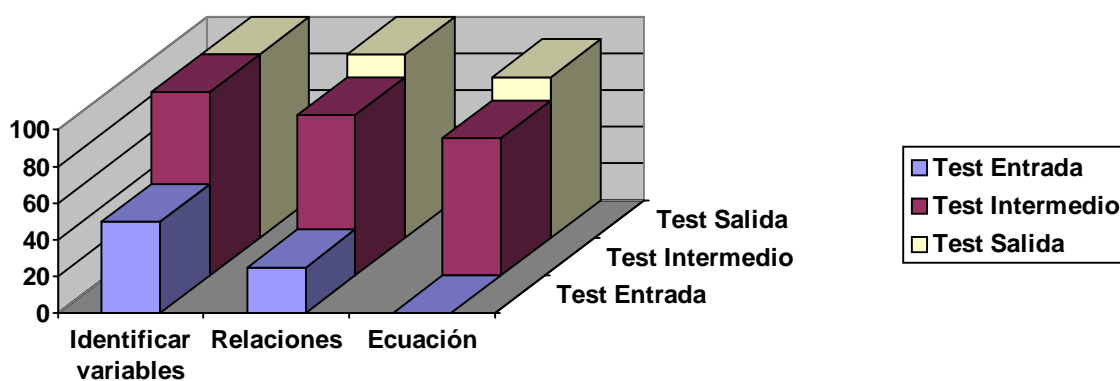
2- Identifique qué factores pueden intervenir en las siguientes problemáticas y plantee ecuaciones que demuestren la dependencia funcional existente:

- a) El éxito de la participación de los jóvenes en una actividad política organizada por la UJC.
- b) La disminución de los resultados de promoción en un grupo de su práctica docente

**Anexo # 9: Comparación de los resultados entre la prueba inicial, la intermedia y la final en lo referente al trabajo con situaciones de la práctica que se pueden representar por medio de funciones**

Se tuvieron en cuenta para esta comparación los siguientes aspectos:

- Identificación de las variables presentes.
- Establecimiento de las relaciones de dependencia
- Planteamiento de la ecuación.





**Anexo # 10: Resultados de la aplicación del criterio de expertos Delphy al sistema de indicadores para medir el pensamiento funcional matemático.**

Indicadores	C1 Imprescindible para medir	C2 Muy útil para medir	C3 Útil para medir	C4 Quizás podría servir para medir	C5 No aporta nada a la medición
I -1	33	0	0	0	0
I -2	29	4	0	0	0
I -3	29	4	0	0	0
I -4	33	0	0	0	0
I-5	25	4	4	0	0
I -6	29	0	4	0	0

Indicadores	Categorías
I -1	Imprescindible para medir
I -2	Imprescindible para medir
I -3	Imprescindible para medir
I -4	Imprescindible para medir
I -5	Imprescindible para medir
I -6	Imprescindible para medir

**Anexo # 11:**

Estimado profesor:

Estamos solicitando su valiosa cooperación para evaluar una propuesta metodológica para la utilización de la Informática para propiciar un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de las funciones matemáticas. Sus criterios son de suma importancia para nosotros, por lo que le pedimos nos brinde su cooperación contestando las preguntas que se realizan a continuación. Muchas gracias.

- 1- Marque con una cruz en la casilla que caracteriza su nivel de conocimiento sobre la enseñanza de la matemática utilizando paquetes matemáticos informatizados. "0" significa total desconocimiento del tema y "10" que tiene pleno conocimiento del mismo.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- 2- Valore el grado de influencia de cada una de las fuentes que se señalan en la tabla en sus criterios:

FUENTES DE ARGUMENTACION	Grado de influencia de cada una de las fuentes en sus criterios.		
	A (alto)	M (medio)	B (bajo)
Análisis teóricos realizados por usted			
Su experiencia obtenida			
Trabajos de autores nacionales			
Trabajos de autores extranjeros			
Su propio conocimiento del estado del problema en el extranjero			
Su intuición			

**Anexo # 12****a) Tabla patrón**

FUENTES DE ARGUMENTACION	Grado de influencia de cada una de las fuentes en sus criterios.		
	A (alto)	M (medio)	B (bajo)
Análisis teóricos realizados por usted	0.3	0.2	0.1
Su experiencia obtenida	0.5	0.4	0.2
Trabajos de autores nacionales	0.05	0.05	0.05
Trabajos de autores extranjeros	0.05	0.05	0.05
Su propio conocimiento del estado del problema en el extranjero	0.05	0.05	0.05
Su intuición	0.05	0.05	0.05

**b) Coeficiente de competencia de los especialistas**

Coeficiente de competencia	Cantidad de especialistas
Bajo (menor que 0,5)	7
Medio ( $0,5 < K < 0,8$ )	8
Alto ( $0,8 \leq K < 1$ )	33
Total	48

**Anexo # 13:**

Estimado profesor:

Nuevamente nos dirigimos a usted, pero esta vez con la satisfacción de informarle que reúne las condiciones idóneas para el trabajo que estamos realizando, por lo que solicitamos su valiosa cooperación para evaluar la propuesta metodológica para la enseñanza de las funciones utilizando computadoras, de la que le hablamos anteriormente. Le reiteramos que sus criterios son imprescindibles para la culminación de la investigación, por lo que le pedimos nos brinde su cooperación asignando una de las categorías que se expresan en la siguiente tabla a cada uno de los pasos que conforman la propuesta metodológica que se ofrece a continuación. Le estamos muy agradecidos por su cooperación.

Una propuesta metodológica para la utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones matemáticas.

**Objetivo:** Elaborar una propuesta metodológica para la utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones que propicie un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de las funciones matemáticas en los Institutos Superiores Pedagógicos.

Evalúe cada aspecto de la propuesta metodológica:

Categorías: C1 - Muy adecuado, C2 - Bastante adecuado, C3 - Adecuado,

C4 - Poco adecuado y C5 - No adecuado.

Aspectos a evaluar	C1	C2	C3	C4	C5
1- La labor del profesor como mediador del proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones debe estar dirigida a promover y acompañar el aprendizaje de los estudiantes, convertirse en un facilitador del mismo, partiendo de su profundo dominio del tema, del trabajo con el recurso informático, del diagnóstico integral de cada uno de los estudiantes y del funcionamiento como					

grupo, propiciando la máxima comunicación, enfrentando a los estudiantes a situaciones que provoquen el debate, el intercambio de ideas y la propuesta de soluciones a los problemas a los que se enfrentan.					
2- La labor de mediadores de los estudiantes del grupo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones estará facilitada a partir del trabajo en dúos en cada máquina, en caso de que no estén conectadas en red. De esta manera se producirá el debate e intercambio de ideas, el planteamiento de interrogantes que estimulen el autoaprendizaje, la búsqueda y procesamiento de información complementaria, la metacognición. Esta labor puede ser apoyada por el profesor con el empleo de guías y hojas de trabajo, la clara distribución de responsabilidades, el intercambio de roles en el dúo o equipo de estudiantes, la búsqueda y análisis de documentos escritos o audiovisuales o con propuestas con las que se pueda incidir en un área determinada de la sociedad.					
La introducción de la Informática en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones matemáticas propicia la realización de cambios en los objetivos. Se deben eliminar o modificar los siguientes:	X	X	X	X	X
3.1 Desarrollar habilidades en la representación gráfica de funciones, apoyándose en la representación de puntos en el plano coordenado.					
3.2 Aplicar procedimientos para el cálculo de límites, cálculo de derivadas, análisis del crecimiento de una función, determinación de valores aproximados, cálculo de integrales y cálculo de áreas.					
3.3 Aplicar las reglas del cálculo de derivadas e integrales indefinidas al cálculo y a la resolución de problemas					

simples.					
3.4 Resolver mediante reflexiones lógicas ecuaciones diferenciales muy simples.					
En su lugar se incluirán los siguientes objetivos:	X	X	X	X	X
3.5 Representar gráficamente las funciones matemáticas a partir del empleo de asistentes matemáticos informatizados.					
3.6 Calcular límites, derivadas e integrales utilizando asistentes matemáticos informatizados.					
3.7 Resolver ecuaciones diferenciales de 1ro y 2do órdenes con coeficientes constantes, empleando asistentes matemáticos informatizados, comprobando las soluciones obtenidas resolviendo las ecuaciones por medio de inferencias lógicas..					
3.8 Modelar procesos y fenómenos de la realidad objetiva mediante el empleo de ecuaciones de funciones conocidas o ecuaciones funcionales en general.					
3.9 Reconocer a partir del análisis de los gráficos de las funciones: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Las transformaciones del gráfico de una función dada (traslaciones, dilataciones, contracciones y reflexiones).</li> <li>• Las relaciones existentes entre el gráfico de una función y su inversa.</li> <li>• Las relaciones existentes entre los gráficos de una función y sus derivadas.</li> <li>• Las relaciones existentes entre las primitivas de una función dada.</li> <li>• Propiedades de las soluciones de las ecuaciones diferenciales de 1er y 2do órdenes con coeficientes constantes.</li> </ul>					
3.10 Formular problemas relacionados con otros					

contenidos matemáticos y con la comunidad.					
3.11 Resolver problemas relacionados con otros contenidos matemáticos, con la comunidad y con los estudios sobre Ciencia, Tecnología y Sociedad (CTS), aplicando los contenidos sobre funciones.					
4 En cuanto a los contenidos no se producen cambios significativos; los cambios se producen fundamentalmente en los procedimientos y métodos a emplear. A partir del enfoque que se pretende dar al estudio de las funciones se debe incluir como contenido una selección de problemas relacionados con los estudios CTS.					
Sobre los métodos y procedimientos:	X	X	X	X	X
5.1 Deben predominar los métodos que estimulen la actividad productiva de los estudiantes; es decir, la exposición problémica, búsqueda parcial o heurístico, investigativo, juegos didácticos, discusiones temáticas y estudios de casos.					
5.2 El uso de la computadora para mediar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones se debe diseñar de forma que se creen espacios para la búsqueda, procesamiento y la aplicación de la información, ya sea en la clase o fuera de ella, para promover el encuentro con otros individuos y la apropiación de las posibilidades estéticas y lúdicas que van ligadas a las diferentes creaciones.					
5.3 Cualesquiera sean los asistentes matemáticos informatizados seleccionados para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje de las funciones, teniendo en cuenta la “amigabilidad” con que han sido confeccionados, su aprendizaje se debe realizar simultáneamente con el contenido sobre funciones que se esté abordando.					

5.4 Se deben aprovechar las posibilidades de graficación que ofrecen los asistentes matemáticos para el logro de la comprensión de las relaciones existentes entre el gráfico de una función y su inversa, transformaciones del gráfico de una función (traslaciones, reflexiones, dilataciones, contracciones), derivadas, primitivas y de las soluciones de ecuaciones diferenciales de 1ro y 2do órdenes con coeficientes constantes, propiciando en todos los casos que los estudiantes sean los que “descubran” dichas relaciones.					
Se producirán cambios significativos en algunos de los procedimientos utilizados tradicionalmente:	X	X	X	X	X
5.5 Para la graficación de funciones se utilizarán los asistentes matemáticos, por lo que el procedimiento será el concebido en la concepción del asistente seleccionado. Por ejemplo, si se utiliza el Derive, se procederá como sigue: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Hacer clic en “Definir”</li> <li>• Seleccionar la opción “función”</li> <li>• Escribir en el cuadro de diálogo el “nombre de la función” (<math>f(x)</math>, <math>G(x)</math>, <math>p(t)</math>, ...) y la forma de sus imágenes (<math>2x+3</math>, <math>\sin x</math>, <math>\exp(x)</math>, según el caso)</li> <li>• Hacer clic en el icono 2D para pasar a la pantalla de graficación</li> <li>• Hacer clic en “Representar”</li> </ul> En el caso de algunas funciones elementales se puede verificar el gráfico realizado por la máquina, graficando “a mano”, lo que permite contribuir a fijar la relación entre el gráfico y la función.					
5.6 Propiedades que se utilizaban para construir el gráfico (ceros, vértices, monotonía, paridad, periodicidad) se podrán determinar ahora a partir del gráfico y luego serán					



formalizadas.					
5.7 Para el análisis del dominio de definición y la imagen de funciones que se analizaban proyectando el gráfico sobre los ejes coordenados $x$ e $y$ respectivamente, se utilizará ahora el “modo de trazado”, que permite recorrer el gráfico, y la ampliación o reducción de la escala de los ejes coordenados, según convenga. Se producirá de esta manera un reforzamiento en la comprensión por parte de los estudiantes del no acotamiento del dominio de definición y/o la imagen de determinadas funciones.					
5.8 El cálculo de límites, derivadas e integrales se realizará con el empleo del asistente matemático. De manera similar se procederá con la resolución de ecuaciones diferenciales de 1ero y 2do órdenes con coeficientes constantes.					
5.9 La utilización de la computadora facilitará la elaboración y asimilación de conceptos fundamentales como los de límite de una función en un punto, límites laterales, derivada de una función en un punto, primitiva, integral definida e indefinida, a partir del aprovechamiento de la multimedia en animaciones y videos que permiten, por ejemplo, mostrar cómo las secantes se acercan a la posición límite (tangente a una curva en un punto) en el análisis de la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.					
5.10 La animación de gráficos facilita la comprensión del concepto de límite al infinito y límites laterales, como se muestra en el producto informático “Calculus”.					
5.11 Otros contenidos, como la interpretación física de la derivada de una función en un punto, se pueden abordar en debate posterior a la búsqueda por parte de los estudiantes en una enciclopedia electrónica.					

Las transformaciones anteriores posibilitan un ahorro considerable de tiempo, lo que permitirá centrar el trabajo en:	X	X	X	X	X
5.12 El análisis de los aspectos teóricos esenciales, en la fundamentación de los procedimientos utilizados y en favorecer la metacognición.					
5.13 En la elaboración y asimilación de conceptos. En el caso de la vía inductiva para la elaboración de conceptos, el empleo de la computadora facilitará la búsqueda de las características comunes de los objetos que se investigan y el reconocimiento de las características esenciales, hasta llegar a elaborar la definición del concepto, procediendo de la siguiente manera: presentar un software con el que el estudiante pueda interactuar en la determinación de las características comunes y esenciales y cada dúo llevará al debate una propuesta de concepto. Este recurso informático se puede confeccionar de manera tal que solo sea necesario cambiar la biblioteca de datos para la elaboración de otros conceptos.					
5.14 En la determinación de las relaciones entre los conceptos, para lo que se elaborarán mapas conceptuales por parte de los dúos o equipos de estudiantes, los que deben ser objeto de debate en las clases. Para esto el profesor comenzará el trabajo con mapas conceptuales incompletos para que sean completados por los estudiantes y en la medida en que se van desarrollando los temas, irlos entrenando en esta tarea hasta que lleguen a confeccionar sus propios mapas.					
5.15 En la demostración de teoremas para contribuir al adiestramiento lógico, mediante la búsqueda de					

demostraciones, el empleo de inferencias lógicas en la representación de demostraciones y en la utilización de los medios que permiten la racionalización del trabajo mental. Para la búsqueda de teoremas se puede confeccionar un software similar, en cuanto a su estructura, al utilizado en la elaboración de conceptos y proceder de manera similar en lo que respecta a la búsqueda de suposiciones y planteamiento de una tesis. En el debate se analizará la propuesta de cada dúo.					
5.16 En la formulación y resolución de problemas.					
5.17 En la búsqueda, procesamiento y aplicación de información en el medio informático y el debate de los resultados.					
Para fijar los conceptos y procedimientos se atenderá a:	X	X	X	X	X
5.18 La presencia de ejercicios que combinen el trabajo "a mano" con el trabajo en la máquina, con el objetivo de desarrollar habilidades que se pueden perder si sólo se trabaja con la máquina. Unas veces se realizará el trabajo a mano y se comprobará en la máquina, otras veces, a partir del trabajo en la máquina se realizarán los análisis, deducciones y generalizaciones necesarios.					
5.19 El empleo de diferentes tipos de ejercicios, particularmente aquellos en que sea imprescindible realizar diferenciación de casos, realizar valoraciones sobre parámetros dados, que impliquen la toma de decisiones.					
5.20 Inclusión de ejercicios que conduzcan a la obtención de nuevos conocimientos relacionados con el tema o que impliquen la realización de pequeñas investigaciones para poder solucionarlos, lo que permite utilizar otros recursos informáticos como enciclopedias, tutoriales y otros software.					

Inclusión de ejercicios que permitan vincular los contenidos que se estudian con otros temas de la Matemática y que permitan dar cumplimiento a las orientaciones de los nuevos programas de Matemática sobre la estimación y el trabajo con valores aproximados.					
5.22 Inclusión de problemas relacionados con la vida cotidiana, su comunidad y la comunidad en que se encuentra enclavado el centro de estudios y vinculados con los estudios CTS, que contribuyan a la formación ideopolítica de los estudiantes, prestando más atención a las vías de resolución y a la ganancia metodológica que se pueda extraer del proceso de resolución, para favorecer el desarrollo del pensamiento.					
6.1 El medio de enseñanza fundamental concebido para este tema es la computadora. Se aprovechan en esta propuesta tres de sus formas de empleo reconocidas: como medio de enseñanza, como herramienta de trabajo y en la simulación de procesos y fenómenos					
6.2 Resulta muy apropiada la utilización en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones de presentaciones electrónicas (Power point, por ejemplo), asistentes matemáticos informatizados como el DERIVE, Cabri-Geometry, Prematic y Calculus, lo que no elimina la posibilidad de utilizar software elaborados por el profesor y otros productos del trabajo científico estudiantil y las enciclopedias electrónicas.					
6.3 Se concibe en esta propuesta el apoyo al trabajo con la computadora a través del empleo de hojas de trabajo y guías para la orientación de la actividad de los estudiantes.					
7.1 Las formas de enseñanza que deben predominar en el proceso de enseñanza aprendizaje de las funciones, en					

cuanto a las clases deben ser el seminario taller (el profesor orienta el trabajo, declara los objetivos que se persigue lograr, entrega los materiales necesarios, ofrece las instrucciones mínimas para el trabajo con el asistente matemático y los estudiantes se apropian de la información necesaria en la máquina bajo la orientación del profesor y luego se procede al debate), el seminario y las prácticas de laboratorio.					
7.2 En lo referente a la actividad extradocente, debe predominar el trabajo con la comunidad y con centros de producción e investigación para la recolección de datos con los que se puedan formular y resolver problemas					
8 Utilizar las potencialidades de la Informática en función de la creación de cuestionarios interactivos que permitan la evaluación en tiempo real del estudiante con la utilización de la computadora, preparación de programas “demos” con los paquetes matemáticos donde se pueda seguir la traza en la lógica del trabajo del estudiante, acompañado de la observación por parte del profesor del desarrollo que demuestra cada estudiante en la búsqueda y procesamiento de la información, de la originalidad que demuestran en la resolución de ejercicios y problemas, de las posibilidades que demuestran de formular y resolver problemas y de la organicidad de sus planteamientos en los debates.					

¿Desea hacer alguna valoración u ofrecer alguna sugerencia?

---



---



---



---

---

---

**Anexo # 14: Resultados de la aplicación del Delphy**

Indicaciones	C1	C2	C3	C4	C5	Total
1	33	0	0	0	0	33
2	27	6	0	0	0	33
3--1	14	8	11	0	0	33
3--2	9	16	8	0	0	33
3--3	9	16	8	0	0	33
3--4	11	14	8	0	0	33
3--5	14	13	6	0	0	33
3--6	9	13	11	0	0	33
3--7	6	22	3	2	0	33
3--8	20	13	0	0	0	33
3--9	28	5	0	0	0	33
3--10	23	10	0	0	0	33
3--11	27	6	0	0	0	33
4	22	6	5	0	0	33
5--1	33	0	0	0	0	33
5--2	28	5	0	0	0	33
5--3	16	13	2	2	0	33
5--4	27	6	0	0	0	33
5--5	11	16	6	0	0	33
5--6	25	8	0	0	0	33
5--7	23	8	2	0	0	33
5--8	7	18	6	2	0	33
5--9	25	5	3	0	0	33
5--10	23	8	2	0	0	33
5--11	23	10	0	0	0	33
5--12	18	13	1	1	0	33
5--13	25	5	3	0	0	33
5--14	17	10	6	0	0	33
5--15	18	13	1	1	0	33
5--16	25	5	3	0	0	33
5--17	28	5	0	0	0	33
5--18	28	5	0	0	0	33
5--19	23	8	2	0	0	33
5--20	23	10	0	0	0	33
5--21	29	4	0	0	0	33
5--22	33	0	0	0	0	33
6--1	33	0	0	0	0	33
6--2	20	10	3	0	0	33
6--3	22	8	3	0	0	33
7--1	23	5	5	0	0	33
7--2	17	10	6	0	0	33
8	20	10	3	0	0	33

Tabla de frecuencias acumuladas

Indicaciones	C1	C2	C3	C4	Total
1	33	33	33	33	33
2	27	33	33	33	33
3--1	14	22	33	33	33
3--2	9	25	33	33	33
3--3	9	25	33	33	33
3--4	11	25	33	33	33
3--5	14	27	33	33	33
3--6	9	22	33	33	33
3--7	6	28	31	33	33
3--8	20	33	33	33	33
3--9	28	33	33	33	33
3--10	23	33	33	33	33
3--11	27	33	33	33	33
4	22	28	33	33	33
5--1	33	33	33	33	33
5--2	28	33	33	33	33
5--3	16	29	31	33	33
5--4	27	33	33	33	33
5--5	11	27	33	33	33
5--6	25	33	33	33	33
5--7	23	31	33	33	33
5--8	7	25	31	33	33
5--9	25	30	33	33	33
5--10	23	31	33	33	33
5--11	23	33	33	33	33
5--12	18	31	32	33	33
5--13	25	30	33	33	33
5--14	17	27	33	33	33
5--15	18	31	32	33	33
5--16	25	30	33	33	33
5--17	28	33	33	33	33
5--18	28	33	33	33	33
5--19	23	31	33	33	33
5--20	23	33	33	33	33
5--21	29	33	33	33	33
5--22	33	33	33	33	33
6--1	33	33	33	33	33
6--2	20	30	33	33	33
6--3	22	30	33	33	33
7--1	23	28	33	33	33
7--2	17	27	33	33	33
8	20	30	33	33	33



**Tabla de frecuencias relativas acumulativas**

Indicaciones	C1	C2	C3	C4
1	1	1	1	1
2	0,81818182	1	1	1
3--1	0,42424242	0,66666667	1	1
3--2	0,27272727	0,75757576	1	1
3--3	0,27272727	0,75757576	1	1
3--4	0,33333333	0,75757576	1	1
3--5	0,42424242	0,81818182	1	1
3--6	0,27272727	0,66666667	1	1
3--7	0,18181818	0,84848485	0,93939394	1
3--8	0,60606061	1	1	1
3--9	0,84848485	1	1	1
3--10	0,6969697	1	1	1
3--11	0,81818182	1	1	1
4	0,66666667	0,84848485	1	1
5--1	1	1	1	1
5--2	0,84848485	1	1	1
5--3	0,48484848	0,87878788	0,93939394	1
5--4	0,81818182	1	1	1
5--5	0,33333333	0,81818182	1	1
5--6	0,75757576	1	1	1
5--7	0,6969697	0,93939394	1	1
5--8	0,21212121	0,75757576	0,93939394	1
5--9	0,75757576	0,90909091	1	1
5--10	0,6969697	0,93939394	1	1
5--11	0,6969697	1	1	1
5--12	0,54545455	0,93939394	0,96969697	1
5--13	0,75757576	0,90909091	1	1
5--14	0,51515152	0,81818182	1	1
5--15	0,54545455	0,93939394	0,96969697	1
5--16	0,75757576	0,90909091	1	1
5--17	0,84848485	1	1	1
5--18	0,84848485	1	1	1
5--19	0,6969697	0,93939394	1	1
5--20	0,6969697	1	1	1
5--21	0,87878788	1	1	1
5--22	1	1	1	1
6--1	1	1	1	1
6--2	0,60606061	0,90909091	1	1
6--3	0,66666667	0,90909091	1	1
7--1	0,6969697	0,84848485	1	1
7--2	0,51515152	0,81818182	1	1
8	0,60606061	0,90909091	1	1

### Imágenes por la inversa de la curva normal

Indicaciones					Suma
1	3,49	3,49	3,49	3,49	13,96
2	0,90845788	3,49	3,49	3,49	11,3784579
3--1	-0,19105187	0,69852604	3,49	3,49	7,48747417
3--2	-0,60458433	0,69852604	3,49	3,49	7,07394171
3--3	-0,60458433	0,69852604	3,49	3,49	7,07394171
3--4	-0,4307276	0,69852604	3,49	3,49	7,24779844
3--5	-0,19105187	0,90845788	3,49	3,49	7,69740601
3--6	-0,60458433	0,4307276	3,49	3,49	6,80614327
3--7	-0,90845788	1,02995728	1,54970621	3,49	5,16120561
3--8	0,26906605	3,49	3,49	3,49	10,739066
3--9	1,02995728	3,49	3,49	3,49	11,4999573
3--10	0,51570396	3,49	3,49	3,49	10,985704
3--11	0,90845788	3,49	3,49	3,49	11,3784579
4	0,4307276	1,02995728	3,49	3,49	8,44068487
5--1	3,49	3,49	3,49	3,49	13,96
5--2	1,02995728	3,49	3,49	3,49	11,4999573
5--3	-0,03798846	3,49	1,54970621	3,49	8,49171776
5--4	0,90845788	3,49	3,49	3,49	11,3784579
5--5	-0,4307276	0,90845788	3,49	3,49	7,45773028
5--6	0,69852604	3,49	3,49	3,49	11,168526
5--7	0,51570396	1,54970621	3,49	3,49	9,04541017
5--8	-0,79908204	0,69852604	1,54970621	3,49	4,9391502
5--9	0,69852604	1,33517915	3,49	3,49	9,01370519
5--10	0,51570396	1,54970621	3,49	3,49	9,04541017
5--11	0,51570396	3,49	3,49	3,49	10,985704
5--12	0,11418479	3,49	1,87636033	3,49	8,97054512
5--13	0,69852604	1,33517915	3,49	3,49	9,01370519
5--14	0,03798846	0,90845788	3,49	3,49	7,92644633
5--15	0,11418479	3,49	1,87636033	3,49	8,97054512
5--16	0,69852604	1,33517915	3,49	3,49	9,01370519
5--17	1,02995728	3,49	3,49	3,49	11,4999573
5--18	1,02995728	3,49	3,49	3,49	11,4999573
5--19	0,51570396	1,54970621	3,49	3,49	9,04541017
5--20	0,51570396	3,49	3,49	3,49	10,985704
5--21	1,16894853	3,49	3,49	3,49	11,6389485
5--22	3,49	3,49	3,49	3,49	13,96
6--1	3,49	3,49	3,49	3,49	13,96
6--2	0,26906605	1,33517915	3,49	3,49	8,5842452
6--3	0,4307276	1,33517915	3,49	3,49	8,74590675
7--1	0,51570396	1,02995728	3,49	3,49	8,52566123
7--2	0,03798846	0,90845788	3,49	3,49	7,92644633
8	0,26906605	1,33517915	3,49	3,49	8,5842452
	25,5483427	93,1072547	137,531839	146,58	402,767437

N	1,91794017
---	------------

PUNTOS DE CORTE	Muy Adec.	Adecuado	Bast Adec.	Poco Adec	No adecuado
	0,60829387	2,2168394	3,2745676	3,49	

Indicaciones	N-P	CATEGORÍA	Indicaciones	N-P	CATEGORÍA
1	-1,57205983	Muy Adec.	5--8	0,68315262	Bast.Adec.
2	-0,9266743	Muy Adec.	5--9	-0,33548612	Muy Adec.
3--1	0,04607163	Muy Adec.	5--10	-0,34341237	Muy Adec.
3--2	0,14945475	Muy Adec.	5--11	-0,82848582	Muy Adec.
3--3	0,14945475	Muy Adec.	5--12	-2,24263628	Muy Adec.
3--4	0,10599056	Muy Adec.	5--13	-2,2534263	Muy Adec.
3--5	-0,00641133	Muy Adec.	5--14	-0,06367141	Muy Adec.
3--6	0,21640436	Muy Adec.	5--15	-0,3246961	Muy Adec.
3--7	0,62763877	Bast. Adec.	5--16	-0,33548612	Muy Adec.
3--8	-0,76682634	Muy Adec.	5--17	-0,95704914	Muy Adec.
3--9	-0,95704914	Muy Adec.	5--18	-0,95704914	Muy Adec.
3--10	-0,82848582	Muy Adec.	5--19	-0,34341237	Muy Adec.
3--11	-0,9266743	Muy Adec.	5--20	-0,82848582	Muy Adec.
4	-0,19223104	Muy Adec.	5--21	-0,99179696	Muy Adec.
5--1	-1,57205983	Muy Adec.	5--22	-1,57205983	Muy Adec.
5--2	-0,95704914	Muy Adec.	6--1	-1,57205983	Muy Adec.
5--3	-0,20498926	Muy Adec.	6--2	-0,22812113	Muy Adec.
5--4	-0,9266743	Muy Adec.	6--3	-0,26853651	Muy Adec.
5--5	0,0535076	Muy Adec.	7--1	-0,21347513	Muy Adec.
5--6	-0,87419133	Muy Adec.	7--2	-0,06367141	Muy Adec.
5--7	-0,34341237	Muy Adec.	8	-0,22812113	Muy Adec.